Csikós Pajor Gizella
Péics Hajnalka

ANALÍZIS

elméleti összefoglaló és példatár

Bolyai Farkas Alapítvány
Zenta 2010.

Szerzők: Csikós Pajor Gizella magiszter, szakfőiskolai tanár,
Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka
Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta

Dr. Péics Hajnalka, rendkívüli egyetemi tanár,
Újvidéki Egyetem, Építőmérnöki Kar, Szabadka

Szaklektor: Boros István magiszter, szakfőiskolai tanár,
Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka

Ábrák: Rožnjik Andrea magiszter, egyetemi tanársegéd,
Újvidéki Egyetem, Építőmérnöki Kar, Szabadka

Fedőlapterv: Molnár Csikós Nándor

Kiadja: Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta

Kiadásért felel: Kormányos Róbert

Felelős szerkesztő: Vida János

A tankönyv kézirata a Szülőföld Alap támogatásával készült.

Kedves Olvasó!

Ezt a matematikakönyvet elsősorban a speciális matematikai gimnáziumban magyarul tanuló diákoknak szántuk, de szívből reméljük, hogy az általános gimnáziumokban és más középiskolákban is fel tudnak használni belőle feladatsorokat, akár a mindennapi oktatásban, akár az emelt szintű tanítás keretein belül, vagy az egyetemi felvételikre való felkészítés folyamán.
Ez a tankönyvpótló kiadvány nem egy meghatározott évfolyam számára készült, mind a négy éven keresztül használhatják a tanulók, ugyanis összefoglaltunk benne minden olyan témakört a matematikai analízis tárgyköréből, melyet az évek folyamán a matematikai szakgimnáziumban tanítunk. Minden címszó alatt rövid elméleti összefoglaló után példák, illusztrációk, majd részletesen kidolgozott feladatsorok következnek.
A Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium megalakulásának első napjától kezdve tanítjuk itt az *Analízis és algebra* tárgyat, és igyekszünk ebben a munkában gyümölcsöztetni a főiskolai és egyetemi oktatásban szerzett sokéves tapasztalatunkat. E könyv megírására az késztetett bennünket, hogy nem tudtunk tanulóinknak olyan magyar nyelvű matematika-tankönyvet ajánlani, amely teljes egészében felölelné a számukra előírt tananyagot. Ez sokban nehezítette a tanulók számára az önálló tanulást. A könyv a magyar nyelv és a matematikai szakkifejezések használatának igényességével íródott, ezzel is segítve a diákokat kétnyelvű környezetünkben a szép és helyes anyanyelv és szaknyelv használatára.
Lektorunk, Boros István magiszter, a Szabadkai Műszaki Szakfőiskola tanára, számos értékes megjegyzéssel segítette munkánkat. A szöveget színes ábrákkal gazdagította és szemléletessé tette Rožnjik Andrea magiszter, a szabadkai Építőmérnöki Kar tanársegédje. Fogadják köszönetünket.
Köszönetet mondunk még a Bolyai Farkas Alapítvány munkatársainak és a Szülőföld Alapnak, akik lehetővé tették és támogatták e könyv kéziratának elkészítését, és elektronikus megjelentetését.
Kitartást és eredményes munkát kívánunk mindenkinek, aki e könyv segítségével szeretne elmélyedni a matematikai analízis csodálatos világában. Úgy gondoljuk, hogy aki velünk együtt kidolgozza az itt következő feladatsorokat, az nemcsak örömét fogja lelni a matematika szépségeiben, hanem a nagy költőhöz, *Kölcsey Ferenchez* hasonlóan, úgy gondolja majd, hogy:

"Lángerő kevésnek adatik; azonban minden egészséges lélek hosszú szorgalom által más tudományát, tapasztalatát, példáját magáévá teheti, helyesen ítélni, egybehasonlítani megtanulhat; s vizsgálat és gyakorlatnál fogva a teremtő lelket ha el nem érheti, hozzája legalább közelíthet."

Zenta, 2010. május *A Szerzők*

Tartalom

1. Halmazok, relációk, függvények **1**

1.1. Halmazelméleti alapfogalmak 1

1.1.1. A halmaz fogalma 1

1.1.2. Műveletek halmazokkal 3

1.1.3. Relációk, leképezések (függvények) 6

1.2. Elemi függvények 22

1.2.1. Lineáris függvény 22

1.2.2. Szakaszonként egyenesvonalú függvény 27

1.2.3. Hatványfüggvény 31

1.2.4. Másodfokú függvény 34

1.2.5. Exponenciális függvény 43

1.2.6. Logaritmusfüggvény 44

1.2.7. Trigonometrikus függvények 45

1.2.8. Árkuszfüggvények 47

1.2.9. Hiperbolikus függvények 50

1.2.10. Áreafüggvények 52

1.3. Elemi függvények és transzformációik 54

2. Számsorozatok **59**

2.1. A sorozat fogalma, megadása és ábrázolása 59

2.1.1. Sorozatok megadása 59

2.1.2. Sorozatok ábrázolása 60

2.2. Korlátos és monoton sorozatok 63

2.3. Rekurzív sorozatok 69

2.3.1. Számtani (aritmetikai) sorozat 69

2.3.2. Mértani (geometriai) sorozat 73

2.3.3. A Fibonacci-féle sorozat 80

2.4. Differenciaegyenletek 81

2.4.1. Véges differenciák 82

2.4.2. Állandó együtthatós lineáris differenciaegyenletek 82

2.5. Konvergens sorozatok 88

2.5.1. Sorozatok határértéke 88

2.5.2. Nullához és végtelenhez tartó sorozatok 92

2.5.3. Műveletek konvergens sorozatokkal 94

2.5.4. Néhány nevezetes sorozat határértéke 95

2.5.5. Végtelen mértani sor 111

3. Egyváltozós valós függvények **114**

3.1. Valós függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak 114

3.1.1. A függvények megadása 114

3.1.2. Valós függvények tulajdonságai 125

3.1.3. Műveletek függvényekkel, az inverz függvény . . . 132
3.2. Függvények folytonossága . . . 139
3.2.1. A folytonosság definíciója . . . 139
3.2.2. Folytonos függvények . . . 142
3.3. Függvények határértéke . . . 143
3.3.1. Függvény határértékével kapcsolatos alapfogalmak . . . 143
3.3.2. Függvény határértékének tulajdonságai . . . 145
3.3.3. Végtelenben vett és végtelen határérték . . . 146
3.3.4. Néhány fontosabb határérték . . . 147
3.3.5. Valós függvény szakadáspontjai és aszimptotái . . . 161

4. Egyváltozós valós függvények differenciálszámítása 169
4.1. A differenciálszámítás alapfogalmai . . . 169
4.1.1. A görbe érintője és a pillanatnyi sebesség . . . 169
4.1.2. A derivált (differenciálhányados) fogalma . . . 171
4.1.3. Differenciálási szabályok . . . 174
4.1.4. A differenciál fogalma . . . 189
4.1.5. Magasabb rendű differenciálhányadosok . . . 190
4.2. A differenciálszámítás alkalmazása . . . 191
4.2.1. A differenciálszámítás középértéktételei . . . 191
4.2.2. A Taylor-formula . . . 194
4.2.3. L'Hospital-szabály . . . 197
4.2.4. A függvény monotonitása és szélsőértékei . . . 202
4.2.5. A függvény konvexitása és inflexiós pontjai . . . 210
4.2.6. Függvénykivizsgálás . . . 212

5. Egyváltozós valós függvények integrálszámítása 239
5.1. A határozatlan integrál fogalma . . . 239
5.2. A határozatlan integrál alaptulajdonságai . . . 241
5.3. Integrálási módszerek . . . 249
5.3.1. Helyettesítési módszer . . . 249
5.3.2. Parciális integrálás módszere . . . 256
5.4. Racionális és racionalizálható integrálok . . . 265
5.4.1. Racionális függvények integrálása . . . 265
5.4.2. Irracionális függvények integrálása . . . 274
5.4.3. Trigonometrikus függvények integrálása . . . 279
5.4.4. Exponenciális és hiperbolikus függvények integrálása . . . 281
5.5. A határozott integrál fogalma és tulajdonságai . . . 283
5.5.1. Arkhimédész módszere síkidomok területének meghatározására . . . 283
5.5.2. A határozott integrál fogalma . . . 284
5.5.3. A határozott integrál tulajdonságai . . . 287
5.5.4. Newton-Leibniz formula . . . 289
5.6. A határozott integrál alkalmazása . . . 294
5.6.1. Síkidomok területszámítása . . . 294
5.6.2. Forgástestek térfogata . . . 302
5.6.3. Ívhossz számítás . . . 305
5.6.4. Forgástestek felszíne . . . 306

5.7. Improprius integrál 307
5.7.1. Első típusú improprius integrál 307
5.7.2. Második típusú improprius integrál 310

6. Differenciálegyenletek **312**
6.1. A differenciálegyenlet fogalma 312
6.2. Elsőrendű differenciálegyenletek 316
6.2.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek 316
6.2.2. Változóiban homogén differenciálegyenlet 321
6.2.3. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet 326
6.2.4. Bernoulli-féle differenciálegyenlet 332
6.3. Másodrendű differenciálegyenlet 339
6.3.1. Másodrendű lineáris differenciálegyenlet 339
6.3.2. Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet 340
6.3.3. Állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet 344

1. Halmazok, relációk, függvények

1.1. Halmazelméleti alapfogalmak

1.1.1. A halmaz fogalma

A *halmazt* a halmazelmélet alapfogalmának tekintjük és ezért nem definiáljuk. Szokás azt mondani, hogy a halmaz *különböző dolgok összessége*. Ez nem definíció, hanem a halmaz más szavakkal való körülírása. A geometriában ugyancsak definíció nélkül, alapfogalomként használjuk például a pont, az egyenes és a sík fogalmát is.
Valamely halmazt akkor tekintünk adottnak, ha bármely pontosan meghatározott dologról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy hozzátartozik-e a szóban forgó halmazhoz (eleme-e a halmaznak). A halmazt alkotó dolgok a *halmaz elemei*. A halmazokat nagybetűvel, elemeit pedig kisbetűvel jelöljük. Azt a tényt, hogy x az A halmaz eleme, így jelöljük: $x \in A$. Ha valamely y elem nem tartozik az A halmazba, akkor ennek jelölése: $y \notin A$. Egy halmazban egy elem csak egyszer fordulhat elő, de a felsorolás sorrendje tetszőleges lehet.

1.1. Példa. Ha $\mathbf{Q}$-val jelöljük a racionális számok halmazát, akkor: $\frac{2}{3} \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

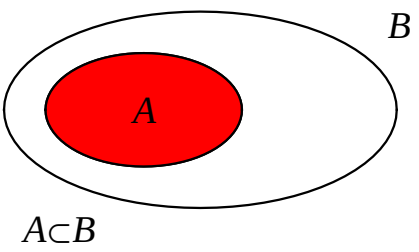
Egy halmazt általában kétféle módon adhatunk meg: vagy felsoroljuk a halmaz elemeit, vagy a halmaz elemeinek pontos körülírását adjuk.

1.2. Példa. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{x \in \mathbf{N} | x < 5\}$ az ötnél kisebb természetes számok halmazát jelöli.

1.3. Példa. A $C = \{x \in \mathbf{R} | 0 < x \leq 4\}$ halmaz a 0 és 4 közé eső valós számok halmazát jelöli. A 0 hozzátartozik a C halmazhoz, a 4 viszont nem.

1.1. Definíció. *Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor az A halmazt az B halmaz részhalmazának nevezzük, és ezt a kapcsolatot így jelöljük: $A \subseteq B$ vagy $B \supseteq A$ (olv: A részhalmaza B-nek).*

1.2. Definíció. *Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, és a B halmaznak van olyan eleme, amely nem eleme A-nak, akkor az A halmazt az B halmaz valódi részhalmazának nevezzük, és ezt a kapcsolatot így jelöljük: $A \subset B$ vagy $B \supset A$ (olv: A valódi részhalmaza B-nek).*



A természetes számok $\mathbf{N}$ halmazára és az egész számok $\mathbf{Z}$ halmazára igaz, hogy $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. Minden halmaz részhalmaza önmagának, azaz $A \subseteq A$.

1.3. Definíció. *A valós számok* $\mathbf{R}$ *halmazának olyan részhalmazait, melyek* a *és* b *két valós szám között vannak, intervallumoknak nevezzük. Nevezetesen:*
$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ *nyitott intervallum,*
$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ *zárt intervallum,*
$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$ *balról nyitott jobbról zárt intervallum,*
$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ *balról zárt jobbról nyitott intervallum.*

A 1.3. Példa C halmaza felírható intervallumként is, $C = (0, 4]$.

1.4. Definíció. *Az* A *és* B *halmazt egyenlőnek nevezzük, azaz* $A = B$ *akkor és csakis akkor, ha* $A \subseteq B$ *és* $B \subseteq A$.

Ha két halmaz egyenlő, akkor az elemeik megegyeznek. Az 3.37. Példa halmazaira tehát igaz, hogy: $A = B$.

1.5. Definíció. *Üres halmazon az olyan* $\emptyset$ *vagy* $\{\}$ *szimbólummal jelölt halmazt értjük, amelynek egy eleme sincs. Eszerint* $\emptyset = \{x | x \neq x\}$.

1.4. Példa. Tekintsük az $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\}$ halmazt. Mivel $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli, és $x^2 + 1 = 0$ semmilyen valós számra nem teljesül, így az A halmaznak nincs eleme, azaz A üres halmaz.

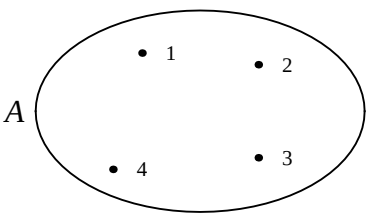
Ha figyelembe vesszük, hogy akárhogyan is adjuk meg az üres halmazt, mindig ugyanarról a halmazról van szó (pontosan arról, amelyiknek nincs eleme), akkor nyilvánvaló, hogy csak egy üres halmaz van. Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

Ha valamilyen halmazokról beszélünk, akkor általában ismertnek veszünk egy *alaphalmazt*, amelyből a szemlélt halmazok elemeit vesszük. Például, ha a páros természetes számok halmazát tekintjük, vagy a prímszámok halmazát szemléljük, akkor ezek a természetes számok $\mathbf{N}$ halmazának a részhalmazai. Hasonlóképpen bármilyen nyitott (a, b) vagy zárt $[a, b]$ intervallum a valós számtengelyen a valós számok $\mathbf{R}$ halmazának a részhalmazai. Ezt az alaphalmazt gyakran nem is említjük, de alapértelmezés szerint ismertnek vesszük. Nevezzük ezt az alaphalmazt *univerzális* halmaznak és jelöljük U-val.

1.6. Definíció. *A halmaz elemeinek számát a halmaz kardinális számának nevezzük. Az* A *halmaz kardinális száma jelölhető* $|A|$, $\#A$ *vagy* $\mathrm{Card}(A)$ *módon.*

A halmazok jól szemléltethetők *Venn-diagrammal*, azaz zárt görbével határolt síkidommal, amelyben a halmazhoz tartozó elemek a síkidom belsejében levő pontok.

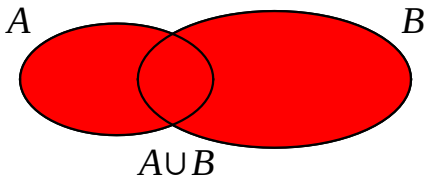
1.5. Példa. Az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz Venn-diagrammal való ábrázolása:



1.1.2. Műveletek halmazokkal

Az alábbiakban olyan műveleteket értelmezünk, amelyek segítségével adott halmazokból meghatározott elemeket tartalmazó újabb halmazokat állíthatunk elő.

1.7. Definíció. *Az A és B halmazok unióján (egyesítésén) azt a halmazt értjük, amelynek elemei az A vagy B halmazok legalább egyikének elemei, tehát $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.*



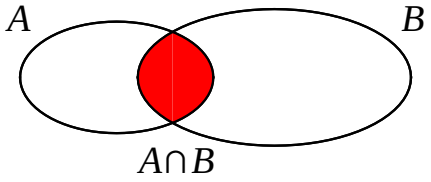
1.6. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n < 5\}$, akkor $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

A definícióból nyílvánvaló, hogy $A \subseteq (A \cup B)$ és $B \subseteq (A \cup B)$.
Az egyesítés művelete kettőnél több halmaz esetén is értelmezhető. Az A_1, A_2, ..., A_n halmazok unióját az

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

szimbólummal jelöljük, és azokból és csakis azokból az elemekből áll, amelyek az uniót alkotó halmazok közül legalább egynek elemei.

1.8. Definíció. *Az A és B halmazok metszetén (közös részén) azt a halmazt értjük, amelynek elemei A-nak is és B-nek is elemei, tehát $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.*



1.7. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n < 5\}$, akkor $A \cap B = \{2, 4\}$.

A definícióból nyílvánvaló, hogy $(A \cap B) \subseteq A$ és $(A \cap B) \subseteq B$.

1.9. Definíció. *Ha az A és a B halmazoknak nincs közös eleme, azaz $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B diszjunkt halmazok.*

A közösrészképzés művelete kettőnél több halmaz esetén is értelmezhető. Az A_1, A_2, ..., A_n halmazok metszetét az

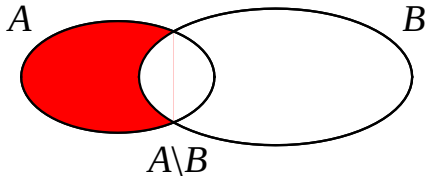
$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

szimbólummal jelöljük, és azokból és csakis azokból az elemekből áll, amelyek a metszetet alkotó halmazok mindegyikének elemei.

1.8. Példa. Az $A = \{x \in \mathbf{R} | -2 \leq x < 1\} = [-2, 1)$ és $B = \{x \in \mathbf{R} | |x| \leq 1\} = [-1, 1]$ halmazok (intervallumok) uniója és metszete

$$A \cup B = [-2, 1] \quad \text{és} \quad A \cap B = [-1, 1).$$

1.10. Definíció. *Az A és B halmazok különbségén azt a halmazt értjük, amely azokat és csakis azokat az elemeket tartalmazza, amelyek A-nak elemei, de B-nek nem elemei, tehát $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.*



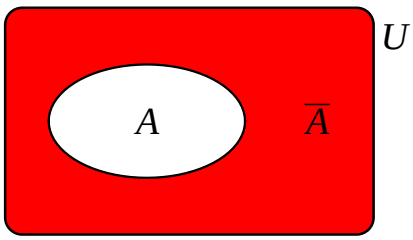
A definícióból azonnal látható, hogy ha A és B diszjunktak, azaz $A \cap B = \emptyset$, akkor $A \setminus B = A$ és $B \setminus A = B$.

1.9. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n < 5\}$, akkor $A \setminus B = \{6, 8\}$ és $B \setminus A = \{1, 3\}$.

1.10. Példa. Ha $A = \{x \in \mathbf{R} | -2 \leq x < 1\} = [-2, 1)$ és $B = \{x \in \mathbf{R} | |x| \leq 1\} = [-1, 1]$ adott halmazok (intervallumok), akkor

$$A \setminus B = [-2, -1) \quad \text{és} \quad B \setminus A = \{1\}.$$

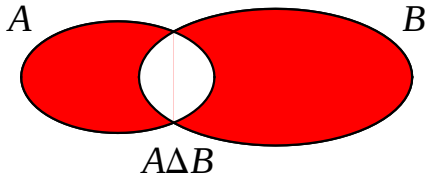
1.11. Definíció. *Legyen A az U univerzális halmaz részhalmaza. Ekkor A-nak az U-ra vonatkozó komplementerén értjük az $U \setminus A$ halmazt, amelyet $\overline{A}$ vagy A' módon jelölünk.*



Könnyen belátható, hogy $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

1.12. Definíció. *Legyen A a B halmaz részhalmaza. Ekkor A-nak a B-re vonatkozó komplementerén értjük a $B \setminus A$ halmazt, amelyet $\overline{A}_B$ módon jelölünk.*

1.13. Definíció. *Az A és B halmazok szimmetrikus különbségén azt az $A \Delta B$ módon jelölt halmazt értjük, amelynek elemei vagy csak az A halmaz vagy csak a B halmaz elemei, vagyis $A \Delta B = \{x | x \in A \veebar x \in B\}$.*



1.11. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n < 5\}$, akkor $A \Delta B = \{1, 3, 6, 8\}$.

Könnyen belátható, hogy $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.1. Tétel. *Az A, B és C tetszőleges halmazokra igazak a következő állítások:*

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ *(idempotencia);*
2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *(kommutativitás);*
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asszociativitás);*
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(az unió és a metszet kölcsönös disztributivitása);*
5. $A \Delta B = B \Delta A$ *(kommutativitás),* $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ *(asszociativitás);*
6. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A \Delta A = \emptyset$;
7. $\overline{\overline{A}} = A$ *(involúció),* $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \cup \overline{A} = U$;
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *(De Morgan-féle azonosságok).*

1.14. Definíció. *Az A halmaz összes részhalmazainak halmazát az A halmaz hatványhalmazának vagy partitív halmazának nevezzük. Ennek jelölésére a $P(A)$ szimbólumot használjuk, tehát $P(A) = \{B | B \subseteq A\}$.*

Ha A elemeinek száma n, akkor $P(A)$ elemeinek száma 2^n.

1.12. Példa. Ha $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ és $B = \{1, 2, 3\}$, akkor $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ és $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

1.15. Definíció. *Az x és y elemekből alkotott rendezett pár (x, y), ahol x a rendezett pár első komponense, y pedig a második komponense. Rendezett párok egyenlősége a megfelelő komponensek egyenlőségét jelenti:* $(x, y) = (u, v) \Longleftrightarrow x = u \wedge y = v$.

A rendezett pár fogalma általánosítható, így beszélhetünk *rendezett n-esek*ről is, amelyek alakja $(x_1, x_2, ..., x_n)$, ahol x_i az i-edik komponens $(i = 1, 2, ..., n)$. Rendezett n-esek között az egyenlőség komponensenkénti egyenlőséget jelent:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n) \Longleftrightarrow x_i = y_i \ (i = 1, 2, ..., n).$$

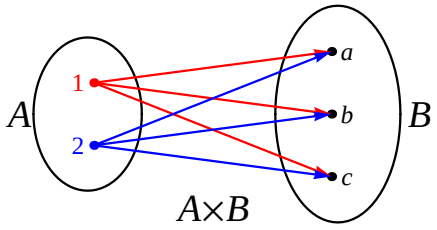
1.16. Definíció. *Az A és B halmazok Descartes-féle szorzatán az (x, y) rendezett párokból alkotott és az $A \times B$ szimbólummal jelölt halmazt értjük, ahol $x \in A$ és $y \in B$, azaz $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$.*

Ha $A = B$, akkor az $A \times A = A^2$ jelölés használatos. Ha A vagy B üres halmaz, akkor $A \times B = \emptyset$.

A Descartes-féle szorzat általánosítása:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge ... \wedge x_n \in A_n\}.$$

1.13. Példa. Ha $A = \{1, 2\}$ és $B = \{a, b, c\}$, akkor $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$,
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$,
$A \times A \times B = \{(1, 1, a), (1, 1, b), (1, 1, c), (1, 2, a), (1, 2, b), (1, 2, c), (2, 1, a), (2, 1, b), (2, 1, c),$
$(2, 2, a), (2, 2, b), (2, 2, c)\}$.



1.1.3. Relációk, leképezések (függvények)

1.17. Definíció. *Legyen A és B két nem üres halmaz. Az A és B halmazok elemei közötti ρ relációnak nevezzük az $A \times B$ halmaz bármely részhalmazát, azaz $\rho \subseteq A \times B$.*

A relációt alkotó rendezett párok első komponenseinek halmaza a reláció *értelmezési tartománya*, a második komponensek halmaza pedig a reláció *értékkészlete*.

1.18. Definíció. *Legyenek A és B nemüres halmazok. Az A és B halmazok elemei közötti $f \subseteq A \times B$ relációt függvénynek (leképezésnek) nevezzük, ha az A halmaz minden eleméhez a B halmaz egy és csakis egy elemét rendeli hozzá, azaz*

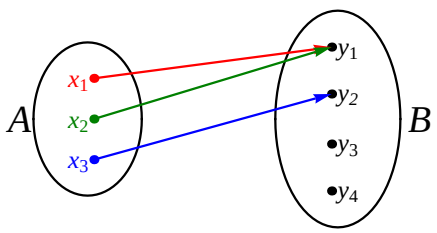
1° $(\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ (x, y) \in f$;

2° $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$.

Ebben a leképezésben az A halmazt a függvény értelmezési tartományának (domenjének), a B halmazt pedig a függvény képtartományának (kodomenjének) nevezzük. A B halmaz azon elemei, amelyek e hozzárendelésben részt vesznek (azaz a képelemek), a függvény $f(A)$ értékkészletét alkotják.

Az értékkészlet tehát része a képtartománynak.
A függvény értelmezésekor szokás az a szóhasználat is, hogy az f függvény az A halmazt a B halmazba képezi le. Ezért mondjuk a függvényt *leképezésnek* is. Ennek egyik jelölési módja: $f : A \to B$. Az f függvény *értelmezési tartományának* jelölése D_f, az *értékkészletének* jelölése pedig R_f. Az értékkészletet $f(A)$ módon is lehet jelölni.
Ha a függvényt f jelöli és $a \in D_f$, akkor az a-hoz rendelt R_f-beli elemet $f(a) = b$ jelöli, amit az f függvény a helyhez tartozó *helyettesítési értékének* nevezzük, és ezt jelölhetjük még $f : a \mapsto b$ vagy $(a, b) \in f$ módon is.

1.14. Példa. Az $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ halmazba való
$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2)\}$ leképezése nyildiagrammal ábrázolva:



Az f függvény megadásához meg kell adni a D_f értelmezési tartományt, az R_f képtartományt és azt a hozzárendelési szabályt, amelynek segítségével minden $x \in D_f$ elemhez meghatározható (kiszámítható) a hozzátartozó $y \in R_f$ elem.
Ha az értelmezési tartomány véges halmaz, akkor a függvény megadható a leképezést definiáló rendezett párok halmazával, a rendezett párok táblázatával, vagy egy formulával (képlettel).

1.15. Példa. Legyen az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz az f leképezés értelmezési tartománya, értékkészlete pedig a $B = \{a, b, c, d\}$ halmaz. Mivel mindkét halmaz véges, ezért a leképezést megadhatjuk rendezett párok halmazával vagy táblázattal a következő módokon:

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, d)\}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix},$$

x	1	2	3	4
$f(x)$	a	c	b	d

.

1.16. Példa. Legyen $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ az f függvény értelmezési tartománya, $\mathbf{Z}$ a képtartománya, $f(x) = 3 - 2x$ pedig a leképezés szabálya. Ekkor $f(-1) = 5$, $f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = -3$, s így $f(A) = \{5, 3, 1, -1, -3\}$ az adott függvény értékkészlete, vagyis $f(A) \subset \mathbf{Z}$. Ez az f leképezés rendezett párokkal és táblázattal is felírható:

$$f = \{(-1, 5), (0, 3), (1, 1), (2, -1), (3, -3)\},$$

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	3	1	-1	-3

.

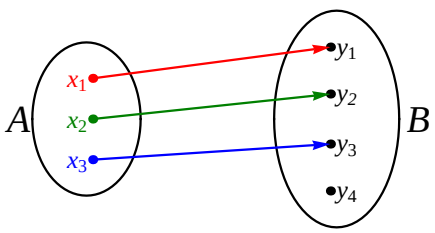
Ha az értelmezési tartomány végtelen halmaz, akkor a függvény a leképezés szabályát kifejező képlettel adható meg.

1.17. Példa. Legyen $f(x) = 2x + 3$ az $\mathbf{R}$ halmaznak az $\mathbf{R}$ halmazba való leképezése. Ekkor az értelmezési tartománynak és az értékkészletnek is végtelen sok eleme van, tehát nem sorolható mind fel. A leképezési szabály segítségével azonban bármely x eredeti elemhez meghatározható az $f(x)$ képelem. Például, $f(0) = 3$, $f(a) = 2a + 3$ és így tovább.

1.19. Definíció. *Az $f_1 : A_1 \to B_1$ és $f_2 : A_2 \to B_2$ függvények egyenlőek, ha megegyezik az értelmezési tartományuk, azaz $A_1 = A_2$ és ha $f_1(x) = f_2(x)$ minden $x \in A_1$ esetén.*

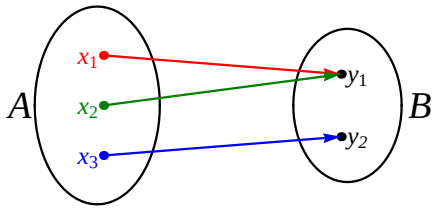
1.20. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvény injektív (vagy 1-1 leképezés), ha minden $x_1, x_2 \in A$ esetén igaz, hogy: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

1.18. Példa. Az $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ halmazba való $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ injektív leképezés nyíldiagrammal ábrázolva:



1.21. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvény szürjektív (vagy halmazra való leképezés), ha minden $y \in B$ elemhez van olyan $x \in A$ elem, hogy $y = f(x)$.*

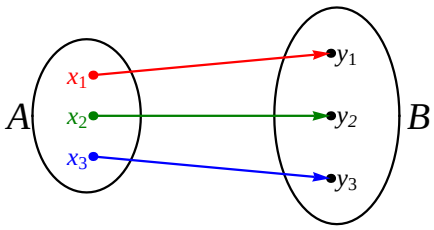
1.19. Példa. Az $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz $B = \{y_1, y_2\}$ halmazra való $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2)\}$ szürjektív leképezés nyíldiagrammal ábrázolva:



1.2. Tétel. *Az $f : A \to B$ függvény akkor és csak akkor szürjektív, ha $f(A) = B$, azaz a függvény értékkészlete egyenlő a képtartományával.*

1.22. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvényt bijektívnek nevezzük, ha egyidejűleg injektív és szürjektív.*

1.20. Példa. Az $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ halmazra való $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ bijektív leképezés nyíldiagrammal ábrázolva:



1.23. Definíció. *Az $i_A : A \to A$ bijektív függvényt az A halmaz A halmazra való identikus leképezésének nevezzük, ha minden $x \in A$ esetén $i_A(x) = x$.*

Ha egyértelmű, hogy melyik halmaz identikus leképezéséről beszélünk, akkor az identikus leképezés jelölésére az i jelölést használjuk.

1.24. Definíció. *Legyenek A és B adott halmazok. Ha az A halmaz bijektív módon leképezhető a B halmazra, akkor azt mondjuk, hogy az A és B halmazok egyenlő számosságúak vagy számosságilag ekvivalensek.*

1.25. Definíció. *Egy halmazt végtelen számosságúnak vagy egyszerűen végtelennek nevezünk, ha van olyan valódi részhalmaza, amellyel számosságilag ekvivalens. Egy halmazt véges számosságúnak vagy végesnek nevezünk, ha nincs egyetlen olyan valódi részhalmaza sem, amellyel számosságilag ekvivalens.*

1.21. Példa. Tekintsük a természetes számok $\mathbf{N}$ halmazát és a páros természetes számok $\mathbf{P}$ halmazát, ahol $\mathbf{P} \subset \mathbf{N}$. Legyen $f : \mathbf{N} \to \mathbf{P}$ olyan leképezés, hogy $f(n) = 2n$. Mivel f bijekció, az $\mathbf{N}$ halmaz végtelen.

1.26. Definíció. *Egy halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha a természetes számok halmazával számosságilag ekvivalens. Ha egy végtelen halmaz számossága nem megszámlálhatóan végtelen, akkor kontinuumszámosságról beszélünk.*

1.22. Példa. A természetes számok $\mathbf{N}$, a páros természetes számok $\mathbf{P}$, az egész számok $\mathbf{Z}$ és a racionális számok $\mathbf{Q}$ halmaza megszámlálhatóan végtelen, viszont a valós számok $\mathbf{R}$ halmaza, az egyenes pontjai, a kör pontjai kontinuumszámosságúak.

1.27. Definíció. *Egy halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha vagy véges, vagy megszámlálhatóan végtelen.*

1.28. Definíció. *Legyenek A, B és C nemüres halmazok, $f : B \to C$ és $g : A \to B$ pedig adott függvények. Az A halmaznak a C halmazba való $f \circ g$-vel jelölt leképezését összetett függvénynek (vagy a függvények kompozíciójának, összetételének) nevezzük és $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ módon értelmezzük minden $x \in A$ elemre.*

1.23. Példa. Ha $f(x) = x + 12$ és $g(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, akkor
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 12$, $x \in \mathbf{R}$,
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 12) = (x + 12)^2$, $x \in \mathbf{R}$.

A fenti példából belátható, hogy $f \circ g = g \circ f$ általánosan nem érvényes, vagyis a leképezések kompozíciója nem kommutatív művelet.

1.3. Tétel. *Legyenek $h : A \to B$, $g : B \to C$ és $f : C \to D$ tetszőleges leképezések. Ekkor érvényes, hogy $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, azaz a leképezések kompozíciója asszociatív művelet.*

Bizonyítás. Mindkét leképezés, $(f \circ g) \circ h$ és $f \circ (g \circ h)$ is, az A halmazon értelmezett. Továbbá minden $x \in A$ elemre igaz, hogy

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x),$$

amivel állításunkat igazoltuk. $\diamond$

Ha $f : A \to B$ függvény bijektív, akkor minden $y \in B$ elemre van olyan $x \in A$ elem, hogy $y = f(x)$. Ez azt jelenti, hogy az f függvényt megadó rendezett párok komponenseit felcserélve ismét függvényt kapunk, ami lehetővé teszi az *inverz függvény* fogalmának bevezetését.

1.29. Definíció. *Legyen $f : A \to B$ bijektív függvény úgy, hogy $f(x) = y$, ha $x \in A$ és $y \in B$. Ekkor az $f^{-1} : B \to A$ leképezést az f függvény inverzének nevezzük, ha $f^{-1}(y) = x$ minden $y \in B$ esetén.*

Az f függvény f^{-1} inverzfüggvénye szintén bijektív. Minden $x \in A$ elemre érvényes, hogy $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ és minden $y \in B$ elemre $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

1.24. Példa. Legyen az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz az f leképezés értelmezési tartománya, értékkészlete pedig a $B = \{a, b, c, d\}$ halmaz. Az $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$ bijektív függvény inverze az $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ függvény. Ezek $f^{-1} \circ f$ összetétele valóban az A halmaz identikus leképezése, mert

$$f^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.25. Példa. Az $f(x) = 2x + 3$ függvény inverzét változócserével a következőképen határozzuk meg: ha $y = 2x + 3$, akkor a változócsere után $x = 2y + 3$. Ebből $y = \frac{x-3}{2}$, azaz $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ az inverz függvény. Az f függvényre és f^{-1} inverzére valóban teljesül, hogy

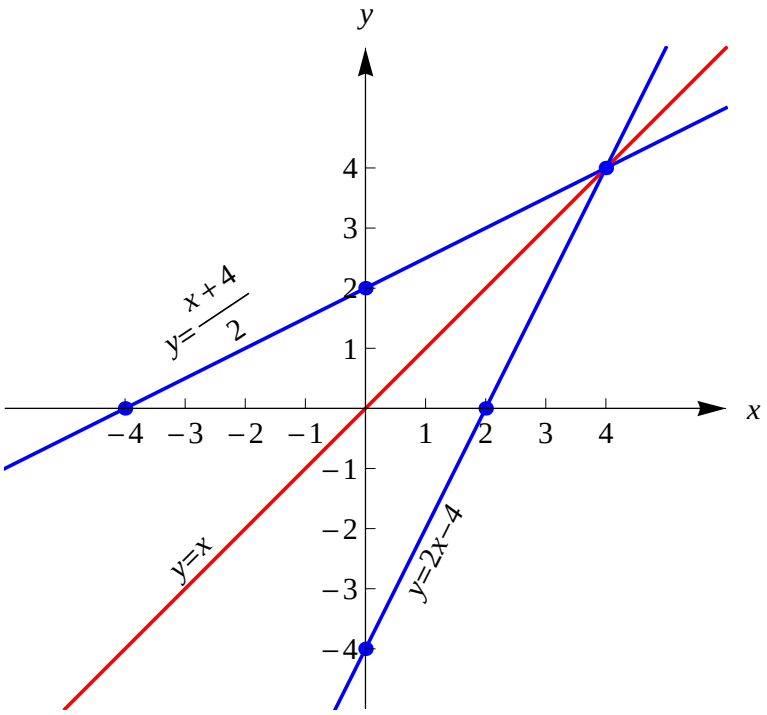
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \frac{2x+3-3}{2} = x \ ,$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x-3}{2}) = 2 \cdot \frac{x-3}{2} + 3 = x \ .$$

Az $f(x) = 2x + 3$ függvény inverzét a definícióból kiindulva is meghatározhatjuk. Mivel a definíció szerint $f^{-1}(f(x)) = x$, ezért $f^{-1}(2x + 3) = x$. Legyen $2x + 3 = t$, ebből pedig $x = \frac{t-3}{2}$. Ezt behelyettesítve az $f^{-1}(2x + 3) = x$ egyenlőségbe adódik, hogy $f^{-1}(t) = \frac{t-3}{2}$, azaz $t = x$ esetén $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ a keresett függvény.

1.30. Definíció. *A $G_f = \{(x, f(x))|x \in A\}$ halmazt az $f : A \to B$ függvény grafikonjának nevezzük. $y = f(x)$ a grafikon egyenlete, ahol x a független változó, y pedig a függő változó.*

Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bijektív függvény grafikonja megrajzolható, akkor az f^{-1} grafikonja is megrajzolható, és ez az f függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben. Például az $f(x) = \frac{x+4}{2}$ függvény és $f^{-1}(x) = 2x - 4$ inverzének grafikonja a koordinátarendszerben az alábbi ábrán látható. Megfigyelhető a két grafikon szimmetrikussága az $y = x$ egyeneshez viszonyítva.



1.31. Definíció. *Függvényegyenletnek nevezzük az olyan egyenletet, amelyben egy (vagy több) ismeretlen függvény és az(ok) független változói szerepelnek.*

FELADATOK

1. Legyenek f_1, f_2 és f_3 az $A = \{2,4,6,8\}$ halmaz $B = \{a,b,c\}$ halmazba való leképezései. Vizsgáljuk ki, hogy közülük melyek szürjektívek, azaz halmazra való leképezések, ha

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ a & b & c & a \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ a & b & a & b \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A feladat megoldásához azt kell megvizsgálni, hogy az $f(A)$ értékkészlet megegyezik-e a B képtartománnyal.

Mivel

$$f_1(A) = \{f_1(2), f_1(4), f_1(6), f_1(8)\} = \{a,b,c,a\} = \{a,b,c\} = B,$$

ezért f_1 szürjektív.

Mivel

$$f_2(A) = \{f_2(2), f_2(4), f_2(6), f_2(8)\} = \{a,b,a,b\} = \{a,b\} \subset B,$$

ezért f_2 nem szürjektív.

Mivel

$$f_3(A) = \{f_3(2), f_3(4), f_3(6), f_3(8)\} = \{a,a,a,a\} = \{a\} \subset B,$$

ezért f_3 nem szürjektív.

2. Legyenek f_1, f_2 és f_3 az $A = \{1,3,5\}$ halmaz $B = \{p,q,r,s\}$ halmazba való leképezései. Vizsgáljuk ki, hogy közülük melyek injektívek, (1-1 leképezések), ha

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ p & q & r \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ s & r & s \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ q & q & q \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A feladat megoldásához azt kell megvizsgálni, hogy vajon különböző eredeti elemek képelemei is különbözőek-e.

Mivel $f_1(1) = p$, $f_1(3) = q$, $f_1(5) = r$, így ha $x_1 \neq x_2$, akkor $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$, tehát az f_1 leképezés injektív.

Mivel $f_2(1) = s = f_2(5)$, így $1 \neq 5$, de $f_2(1) = f_2(5)$, tehát az f_2 leképezés nem injektív.

Mivel $f_3(1) = f_3(3) = f_3(5) = q$, így $1 \neq 3 \neq 5$, de $f_3(1) = f_3(3) = f_3(5)$, tehát az f_3 leképezés nem injektív.

3. Legyen f az $A = \{a,b,c,d\}$ halmaz $B = \{1,2,3,4,5\}$ halmazba való leképezése. Oldjuk meg az $f(x) = 1$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$, $f(x) = 4$ és $f(x) = 5$ egyenleteket, ha

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $f(x) = 1$ esetén $x = a$ vagy $x = b$.
$f(x) = 2$ és $f(x) = 4$ esetén nincs megoldás.
Ha $f(x) = 3$, akkor $x = c$.
Amennyiben $f(x) = 5$, $x = d$ a megoldás.

4. Legyen f az $A = \{a, b, c, d\}$ halmaz önmagába való leképezése. Oldjuk meg az $f(x) = a$, $f(x) = b$, $f(x) = c$, $f(x) = d$, $f(f(x)) = b$, $f(f(f(x))) = d$ és $f(f(f(f(x)))) = a$ egyenleteket, ha $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & d & a \end{pmatrix}$.

Megoldás. $f(x) = a$ esetén $x = d$.
Ha $f(x) = b$, akkor $x = a$ vagy $x = b$.
$f(x) = c$ esetén nincs megoldás.
Amennyiben $f(x) = d$, a megoldás $x = c$.
Ha $f(f(x)) = b$, akkor $f(x) = a$ vagy $f(x) = b$, amiből pedig következik, hogy $x = d$ vagy $x = a$ vagy $x = b$.
Ha $f(f(f(x))) = d$, akkor $f(f(x)) = c$, ezért most nincs megoldás.
$f(f(f(f(x)))) = a$ esetén $f(f(f(x))) = d$, ezért szintén nincs megoldás.

5. Legyen f az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz önmagába való leképezése és $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Határozzuk meg az f^3 és f^4 leképezéseket.
b) Számítsuk ki mivel egyenlő $(f \circ (f \circ f))(3)$, $((f \circ f) \circ f))(4)$ és $((f \circ f) \circ (f \circ f))(1)$.
c) Oldjuk meg az $(f \circ (f \circ f))(x) = 4$ és az $((f \circ f) \circ (f \circ f))(x) = 2$ egyenleteket.

Megoldás.
a)

$$\begin{aligned} f^3 &= (f \circ f) \circ f = f \circ (f \circ f) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4 &= (f \circ f) \circ (f \circ f) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \circ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = i. \end{aligned}$$

b) $(f \circ (f \circ f))(3) = f^3(3) = 3$,
$((f \circ f) \circ f))(4) = f^3(4) = 1$,
$((f \circ f) \circ (f \circ f))(1) = f^4(1) = 1$.

c) Az $(f \circ (f \circ f))(x) = 4$, azaz $f^3(x) = 4$ egyenlet megoldása $x = 1$.
Az $((f \circ f) \circ (f \circ f))(x) = 2$, vagyis $f^4(x) = 2$ egyenlet megoldása $x = 2$.

6. Adottak az $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ és $C = \{p, q, r, s\}$ halmazok, valamint az $f : A \to B$, $g : B \to C$ és $h : C \to A$ leképezések. Határozzuk meg a $g \circ f$, $h \circ g$, $f \circ h$ és $h \circ (g \circ f)$ leképezéseket, ha

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ s & r & q & p \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás.

$$g \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ s & r & q & p \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ r & q & p & s \end{pmatrix}$$

$$h \circ g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ s & r & q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f \circ h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$$

$$h \circ (g \circ f) = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ s & r & q & p \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ r & q & p & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Adottak az $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{10, 20, 30\}$ halmazok, valamint az $f : A \to B$ és $g : B \to C$ bijektív leképezések. Határozzuk meg az f^{-1} és g^{-1} inverzfüggvényeket, majd a $g^{-1} \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$, $f^{-1} \circ f$, $g^{-1} \circ g$ függvénykompozíciókat, ha

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 20 & 30 & 10 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Megoldás.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 20 & 30 & 10 \end{pmatrix},$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 10 & 30 & 20 \end{pmatrix},$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & a & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix},$$

$$f^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & a & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 20 & 30 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = i_A,$$

$$g^{-1} \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} = i_B.$$

8. Adott az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon értelmezett $f(x) = 3x - 4$ leképezés. Határozzuk meg az $f(A)$ értékkészletet, írjuk fel az f leképezést és vizsgáljuk ki, hogy az $f : A \to f(A)$ leképezés bijektív-e.

Megoldás. Mivel $f(-2) = 3 \cdot (-2) - 4 = -10$, $f(-1) = 3 \cdot (-1) - 4 = -7$, $f(0) = 3 \cdot 0 - 4 = -4$, $f(1) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$ és $f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, ezért $f(A) = \{-10, -7, -4, -1, 2\}$. Maga az f függvény így írható le:

$$f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -10 & -7 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel az értékkészlet is és a képtartomány is $f(A)$, ezért a függvény szürjektív. Mivel minden eredeti elemhez más-más képelem tartozik, így teljesül, hogy ha $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$, tehát az f leképezés injektív is, amiből az következik, hogy f bijektív.

9. Adott az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon értelmezett $f : A \to \mathbf{R}$ függvény az $f(x) = 3 - 3|x|$ leképezési szabállyal. Határozzuk meg az $f(A)$ értékkészletet, írjuk fel az f leképezést és vizsgáljuk ki, hogy az $f : A \to \mathbf{R}$ és $f : A \to f(A)$ leképezések bijektívek-e.

Megoldás. A függvényértékek $f(-2) = 3 - 3|-2| = -3$, $f(-1) = 3 - 3|-1| = 0$, $f(0) = 3-3|0| = 3$, $f(1) = 3-3|1| = 0$ és $f(2) = 3-3|2| = -3$, ezért az értékkészlet $f(A) = \{-3, 0, 3\}$. Az f függvény így írható le:

$$f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mivel $f(A) \subset \mathbf{R}$, ezért az $f : A \to \mathbf{R}$ függvény nem szürjektív. Mivel $2 \neq -2$, de $f(-2) = f(2) = -3$, ezért az $f : A \to f(A)$ leképezés nem injektív, amiből az következik, hogy egyik leképezés sem bijektív.

10. Adott az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon értelmezett $f : A \to \mathbf{R}$ függvény az $f(x) = x^2 - 4$ leképezési szabállyal. Határozzuk meg az $f(A)$ értékkészletet, írjuk fel az f leképezést és vizsgáljuk ki, hogy az $f : A \to \mathbf{R}$ és $f : A \to f(A)$ leképezések bijektívek-e.

Megoldás. A függvényértékek $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$, $f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$, $f(0) = (0)^2 - 4 = -4$, $f(1) = 1^2 - 4 = -3$ és $f(2) = 2^2 - 4 = 0$, ezért az értékkészlet $f(A) = \{-4, -3, 0\}$. Az f függvény így írható le:

$$f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $f(A) \subset \mathbf{R}$, ezért az $f : A \to \mathbf{R}$ függvény nem szürjektív. Mivel $-1 \neq 1$, de $f(-1) = f(1) = -3$, ezért az $f : A \to f(A)$ leképezés nem injektív, amiből az következik, hogy egyik leképezés sem bijektív.

11. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = 3x - 4$ leképezési szabállyal definiált $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény bijektív, majd határozzuk meg az $f^{-1}(x)$ inverzfüggvényt.

Megoldás. Egy függvény akkor bijektív, ha injektív is és szürjektív is. Vizsgáljuk először az injektivitást! Ha $x_1 \neq x_2$, akkor $3x_1 \neq 3x_2$ és $3x_1 - 4 \neq 3x_2 - 4$, amiből következik, hogy $f(x_1) \neq f(x_2)$, azaz az f függvény injektív. A szürjektív tulajdonság kivizsgálásához tekintsük az értékkészlet egy tetszőleges $y \in \mathbf{R}$ elemét, amelyet úgy kaptunk, hogy az értelmezési tartomány egy elemét az f függvénnyel leképeztünk, azaz $y = 3x - 4$, valamely $x \in \mathbf{R}$ elemre. Ebből $x = \dfrac{y+4}{3}$, tehát az $y \in \mathbf{R}$ képelem az $x = \dfrac{y+4}{3}$ eredeti elemnek a képe. Ez azt jelenti, hogy az értékkészlet minden egyes y képeleméhez hozzárendelhető egy eredeti x elem, tehát az $f(x) = 3x - 4$ leképezés szürjektív is. Mivel ezek szerint a függvény bijektív, ezért van inverze. Az inverz függvény meghatározása a definíció szerint: mivel $f^{-1}(f(x)) = x$, ezért $f^{-1}(3x - 4) = x$. Legyen $3x - 4 = t$, ebből pedig $x = \dfrac{t+4}{3}$. Ezt behelyettesítve adódik, hogy $f^{-1}(t) = \dfrac{t+4}{3}$, azaz $t = x$ esetén a keresett függvény

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}.$$

12. Legyen $f(x) = 3 - |x|$ az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény leképezési szabálya. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény se nem injektív, se nem szürjektív, majd határozzuk meg a D_f és R_f halmazokat úgy, hogy az f függvény bijektív legyen. Keressük meg az így kapott függvény $f^{-1}(x)$ inverzét.

Megoldás. Az f függvény nem injektív, mert például az $y = 0$ értéket a függvény $x = -1$-ben is és $x = 1$-ben is felveszi, azaz $-1 \neq 1$, de $f(-1) = f(1)$. Ugyanakkor a függvény nem szürjektív, mert 3-nál nagyobb értékeket az f függvény nem vesz fel. Így például nincs olyan valós x érték, amelyre $f(x) = 4$. Ha az értelmezési tartományt és az értékkészletet leszűkítjük $D_f = [0, +\infty)$ és $R_f = (-\infty, 3]$ tartományokra, akkor az $f : D_f \to R_f$ függvény bijektív. Ekkor az f függvény leképezési szabálya $f(x) = 3 - 3x$, ennek inverze pedig

$$f^{-1}(x) = \frac{3 - x}{3}, \quad x \in (-\infty, 3].$$

13. Legyen $f(x) = x^2 - 4$ az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény leképezési szabálya. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény se nem injektív, se nem szürjektív, majd határozzuk meg a D_f és R_f halmazokat úgy, hogy az f függvény bijektív legyen. Keressük meg az így kapott függvény $f^{-1}(x)$ inverzét.

Megoldás. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény nem injektív, mert például az $y = 0$ értéket a függvény $x = -2$-ben is és $x = 2$-ben is felveszi, azaz $-2 \neq 2$, de $f(-2) = f(2)$. Ugyanakkor a függvény nem szürjektív, mert -4-től kisebb értékeket az f függvény nem vesz fel. Így például nincs olyan valós x érték, amelyre $f(x) = -5$. Ha az értelmezési tartományt és az értékkészletet leszűkítjük a $D_f = [0, +\infty)$ és az $R_f = [-4, +\infty)$ tartományokra, akkor az $f : D_f \to R_f$ függvény bijektív. Ekkor az f függvény inverze az

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}, \quad x \in [-4, +\infty).$$

14. Állítsuk össze az $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ és $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$ függvények összetételének (kompozíciójának) táblázatát.

Megoldás. Mivel az $f_1(x) = x = i(x)$, így megállapíthatjuk, hogy

$$f_1 \circ f_k = f_k \circ f_1 = f_k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

A többi esetben a következő számításokat végezhetjük el:

$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(-x) = -(-x) = x = f_1(x)$,

$(f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = f_2\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\left(\dfrac{1}{x}\right) = f_4(x)$,

$(f_2 \circ f_4)(x) = f_2(f_4(x)) = f_2\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} = f_3(x)$,

$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3(f_2(x)) = f_3(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\left(\dfrac{1}{x}\right) = f_4(x)$,

$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3(f_3(x)) = f_3\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x = f_1(x)$,

$$(f_3 \circ f_4)(x) = f_3(f_4(x)) = f_3\left(-\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{-\left(\frac{1}{x}\right)} = -x = f_2(x),$$

$$(f_4 \circ f_2)(x) = f_4(f_2(x)) = f_4(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} = f_3(x),$$

$$(f_4 \circ f_3)(x) = f_4(f_3(x)) = f_4\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -x = f_2(x),$$

$$(f_4 \circ f_4)(x) = f_4(f_4(x)) = f_4\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{-\frac{1}{x}} = x = f_1(x),$$

A keresett táblázat:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

15. *Legyen az $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$ és $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, $n \in \mathbf{N}$. Számítsuk ki az $f_{2009}(2010)$ függvényértéket.

Megoldás.

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = f_1\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x},$$

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = f_1\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x = i(x),$$

$$f_4(x) = f_1(f_3(x)) = f_1(x),$$

$$f_5(x) = f_1(f_4(x)) = f_1(f_1(x)) = f_2(x),$$

$$f_6(x) = f_1(f_5(x)) = f_1(f_2(x)) = f_3(x) = i(x), \text{ és így tovább.}$$

Ebből következik, hogy

$$f_{3n}(x) = x, \quad f_{3n+1}(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{és} \quad f_{3n+2}(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Mivel $2009 = 3 \cdot 699 + 2$, ezért

$$f_{2009}(x) = f_{3\cdot 699+2}(x) = \frac{x-1}{x} \quad \text{és} \quad f_{2009}(2010) = \frac{2010-1}{2010} = \frac{2009}{2010}.$$

16. **Ha az $f_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ függvények sorozatát az $f_1(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_{n+2}(x) = f_{n+1}(f_n(x))$, $n \in \mathbf{N}$ szabállyal képezzük, akkor számítsuk ki mennyivel egyenlő $f_{2010}(2010)$.

Megoldás. $f_3(x) = f_2(f_1(x)) = f_2\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = 1-x,$

$$f_4(x) = f_3(f_2(x)) = f_3\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1} = f_1(x),$$

$$f_5(x) = f_4(f_3(x)) = f_4\left(1-x\right) = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x},$$

$$f_6(x) = f_5(f_4(x)) = f_5\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{x},$$

$$f_7(x) = f_6(f_5(x)) = f_6\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1} = f_1(x),$$

$$f_8(x) = f_7(f_6(x)) = f_7\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{1-x} = f_2(x),$$

$f_9(x) = f_8(f_7(x)) = f_2\left(f_1(x)\right) = f_3(x)$, és így tovább.

Észrevehető, hogy bár az identikus leképezés nem jelenik meg, mégis kialakult egy hatos ciklus. Az $f_7(x) = f_1(x)$ és $f_8(x) = f_2(x)$, ami a ciklus újra indulását jelenti az $f_6(x)$ függvény után.
Mivel $2010 = 6 \cdot 335$, ezért

$$f_{2010}(x) = f_6(x) = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad f_{2010}(2010) = \frac{1}{2010}.$$

17. **Legyen $f_1(x) = \dfrac{x+\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})x+1}$ és $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, $n \in \mathbf{N}$. Számítsuk ki az $f_{2010}(-1)$ értékét.

Megoldás.

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = f_1\left(\frac{x+\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})x+1}\right) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = f_1\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{x+\sqrt{2}+1}{-(\sqrt{2}+1)x+1},$$

$$f_4(x) = f_1(f_3(x)) = f_1\left(\frac{x+\sqrt{2}+1}{-(\sqrt{2}+1)x+1}\right) = -\frac{1}{x},$$

$$f_5(x) = f_1\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x-\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)x+1},$$

$$f_6(x) = f_1(f_5(x)) = f_1\left(\frac{x-\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)x+1}\right) = \frac{x-1}{x+1},$$

$$f_7(x) = f_1(f_6(x)) = f_1\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)x+1},$$

$$f_8(x) = f_1(f_7(x)) = f_1\left(\frac{x-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)x+1}\right) = x = i(x),$$

ezért

$$f_9(x) = f_1(f_8(x)) = f_1(i(x)) = f_1(x), \quad f_{10}(x) = f_1(f_9(x)) = f_1(f_1(x)) = f_2(x),$$

és így tovább. Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén,

$$f_{8n}(x) = x, \quad f_{8n+1}(x) = \frac{x+\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})x+1}, \quad f_{8n+2}(x) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$f_{8n+3}(x) = \frac{x+\sqrt{2}+1}{-(\sqrt{2}+1)x+1}, \quad f_{8n+4}(x) = -\frac{1}{x}, \quad f_{8n+5}(x) = \frac{x-\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)x+1},$$

$$f_{8n+6}(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad f_{8n+7}(x) = \frac{x-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)x+1}.$$

Mivel $2010 = 8 \cdot 251 + 2$, ezért

$$f_{2010}(x) = f_{8\cdot 251+2}(x) = f_2(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{és} \quad f_{2010}(-1) = 0.$$

18. Oldjuk meg az $f(2x-1) = 3x - 5$ függvényegyenletet.

Megoldás. Vezessük be a $2x - 1 = t$ helyettesítést. Ebből $x = \dfrac{t+1}{2}$. Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket az $f(2x-1) = 3x - 5$ függvényegyenletbe adódik, hogy

$$f(t) = 3 \cdot \frac{t+1}{2} - 5 = \frac{3t-7}{2}.$$

Visszatérve t helyett az x független változóra kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{3x-7}{2}.$$

19. Oldjuk meg az $f(x+2) = \dfrac{x+1}{x+7}$ függvényegyenletet, ha $x \neq -7$.

Megoldás. Vezessük be a $x+2 = t$ helyettesítést. Ebből $x = t-2$. Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket az $f(x+2) = \dfrac{x+1}{x+7}$ függvényegyenletbe adódik, hogy

$$f(t) = \frac{t-2+1}{t-2+7} = \frac{t-1}{t+5},$$

illetve visszatérve az x független változóra,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+5}, \quad x \neq -5.$$

20. Oldjuk meg az $f(2x-1) = 4x^2 - 2x + 1$ függvényegyenletet.

Megoldás. Vezessük be a $2x - 1 = t$ helyettesítést. Ebből $x = \dfrac{t+1}{2}$. Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket az $f(2x-1) = 4x^2 - 2x + 1$ függvényegyenletbe adódik, hogy

$$f(t) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{t+1}{2} + 1 = t^2 + t + 1,$$

illetve, hogy

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

21. Legyen a tetszőleges valós szám. Ha $f(x+a) = x^2 + x + a$, akkor határozzuk meg mennyi $f(x-a)$.

Megoldás. A feladatot két lépésben oldjuk meg. Először meghatározzuk az $f(x)$ szabályt, majd kiszámítjuk az f függvény $x-a$ helyen vett helyettesítési értékét. Az $x + a = t$ helyettesítésből $x = t - a$, ahonnan következik, hogy

$$f(t) = (t-a)^2 + (t-a) + a = t^2 + (1-2a)t + a^2,$$

illetve hogy

$$f(x) = x^2 + (1-2a)x + a^2.$$

Az f függvény értéke $x-a$-ban

$$f(x-a) = (x-a)^2 + (1-2a)(x-a) + a^2 = x^2 + (1-4a)x + 4a^2 - a.$$

22. Oldjuk meg az $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{x-2}{x+2}$ függvényegyenletet, ha $x \neq 1$, $x \neq -2$.

Megoldás. Vezessük be a $\dfrac{x+1}{x-1} = t$ helyettesítést.

Ebből $x + 1 = t(x-1)$, ahonnan rendezés után az $x = \dfrac{t+1}{t-1}$ kifejezést kapjuk.

Következik, hogy

$$f(t) = \frac{\frac{t+1}{t-1} - 2}{\frac{t+1}{t-1} + 2} = \frac{3-t}{3t-1},$$

vagyis

$$f(x) = \frac{3-x}{3x-1}, \quad x \neq \frac{1}{3}.$$

23. *Oldjuk meg az $f(x) + xf\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) = 2$ függvényegyenletet, ha $x \neq \dfrac{1}{2}$.

Megoldás. Vezessük be az $\dfrac{x}{2x-1} = t$ helyettesítést.

Ekkor $x = t(2x-1)$, ahonnan rendezés után $x = \dfrac{t}{2t-1}$.

Ezeket behelyettesíve a fenti egyenletbe adódik, hogy

$$f\left(\frac{t}{2t-1}\right) + \frac{t}{2t-1} f\left(t\right) = 2.$$

A kapott egyenletben nevezzük át a t változót x-re. Az így kapott egyenlet az eredetivel együtt a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &+ \quad xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) \quad = \quad 2 \\ \frac{x}{2x-1} f\left(x\right) \quad &+ \quad f\left(\frac{x}{2x-1}\right) \quad = \quad 2 \end{aligned}$$

A második egyenletet beszorozva $(-x)$-szel, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rcrcl} f(x) & + & xf\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) & = & 2 \\ -\dfrac{x^2}{2x-1}f(x) & - & xf\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) & = & -2x \end{array}$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$\left(1-\frac{x^2}{2x-1}\right)f(x)=2-2x,$$

amiből

$$\frac{-(x^2-2x+1)}{2x-1}f(x)=2(1-x),$$

rendezés után pedig a keresett függvény alakja

$$f(x)=\frac{2(2x-1)}{x-1}, \quad x\neq 1.$$

24. *Oldjuk meg az adott függvényegyenletet, ha $x\neq -1$, $x\neq 2$:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha

$$\frac{x+1}{x-2}=t, \quad \text{akkor} \quad \frac{x-2}{x+1}=\frac{1}{t} \quad \text{és} \quad x=\frac{1+2t}{t-1}.$$

Ugyanakkor, ha a helyettesítés

$$\frac{x-2}{x+1}=t, \quad \text{akkor} \quad \frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{t} \quad \text{és} \quad x=-\frac{t+2}{t-1}.$$

Mindkét helyettesítést alkalmazva az adott egyenletre, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rcrcl} f(t) & + & 2f\left(\dfrac{1}{t}\right) & = & \dfrac{1+2t}{t-1} \\ 2f(t) & + & f\left(\dfrac{1}{t}\right) & = & -\dfrac{t+2}{t-1} \end{array}$$

A második egyenletet beszorozva (-2)-vel, majd a két egyenletet összeadva, rendezés után kapjuk a

$$-3f(t) = \frac{1+2t}{t-1} + \frac{2t+4}{t-1}$$

egyenletet, amiből

$$f(t) = \frac{4t+5}{-3(t-1)},$$

illetve áttérve az x változóra, a megoldás

$$f(x) = \frac{4x+5}{-3(x-1)}, \quad x \neq 1.$$

25. **Oldjuk meg az adott függvényegyenlet-rendszert, majd határozzuk meg az $(f \circ g)(x)$ függvénykompozíciót, ha $x \neq 1$:

$$\begin{array}{rcrcl} f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) & + & g\left(2x+1\right) & = & 2x \\ f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) & - & g\left(2x+1\right) & = & x \end{array}$$

Megoldás. Összeadva a két egyenletet, rendezés után adódik, hogy

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{3}{2}x.$$

Ha

$$\frac{x}{x-1} = t, \quad \text{akkor} \quad x = \frac{t}{t-1}$$

és

$$f\left(t\right) = \frac{3t}{2t-2}, \quad \text{vagyis} \quad f(x) = \frac{3x}{2(x-1)}.$$

Vonjuk ki az egyenletrendszer első egyenletéből a másodikat. Ekkor rendezés után kapjuk, hogy

$$g(2x+1) = \frac{x}{2}.$$

Ha

$$2x+1 = t, \quad \text{akkor} \quad x = \frac{t-1}{2}$$

és

$$g\left(t\right) = \frac{t-1}{4}, \quad \text{vagyis} \quad g(x) = \frac{x-1}{4}.$$

A keresett függvénykompozíció pedig

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{4}\right) = \frac{3 \cdot \frac{x-1}{4}}{2\left(\frac{x-1}{4} - 1\right)} = \frac{3(x-1)}{2(x-5)}.$$

1.2. Elemi függvények

A következőkben azokkal a függvényekkel ismerkedünk meg, amelyekre később az általánosabb függvények vizsgálatát alapozni fogjuk. Mivel ezek a függvények már az elemi matematikában is szerepelnek, ezért *elemi alapfüggvényeknek* nevezzük őket. Azokat a függvényeket amelyek az elemi alapfüggvényekből a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és az összetett függvény képzésének véges számú alkalmazásával nyerhetők, *elemi függvényeknek* nevezzük. Az alábbi fejezetekben bemutatjuk az elemi alapfüggvényeket és foglalkozunk néhány fontosabb elemi függvénnyel.

1.2.1. Lineáris függvény

1.32. Definíció. *Legyenek a és b tetszőleges valós számok. Azt az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ valós függvényt, melyet az*

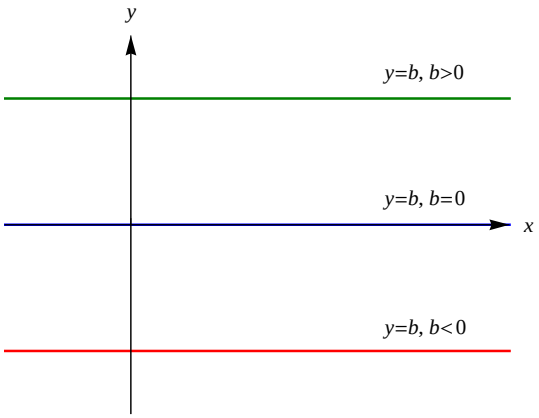
$$f(x) = ax + b$$

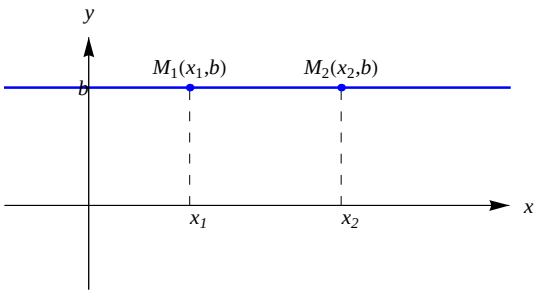
hozzárendeléssel adunk meg, lineáris (vagy elsőfokú) függvénynek nevezzük.

A lineáris függvény minden valós számra értelmezett és minden valós értéket felvesz, azaz értelemzési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, és értékkészlete is ugyanez, vagyis $R_f = \mathbf{R}$.
Az f lineáris függvény grafikonja a

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ x \in \mathbf{R} \quad \text{és} \quad y = ax + b\}$$

ponthalmaz, amely a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben mindig egy egyenes. Ha $a = 0$, akkor a lineáris függvény $f(x) = b$ alakú. Mivel ebben az esetben a képletben nem szerepel az x független változó, ezért ezt a függvényt *konstans függvénynek* nevezzük. A konstans függvény minden egyes pontjának ordinátája (y-koordinátája) b-vel egyenlő, ami azt jelenti, hogy grafikonjának minden egyes pontja b távolságra van az x-tengelytől, ezért az $y = b$ egyenletű függvénygrafikon egy vízszintes helyzetű, azaz az x-tengellyel párhuzamos egyenest határoz meg.

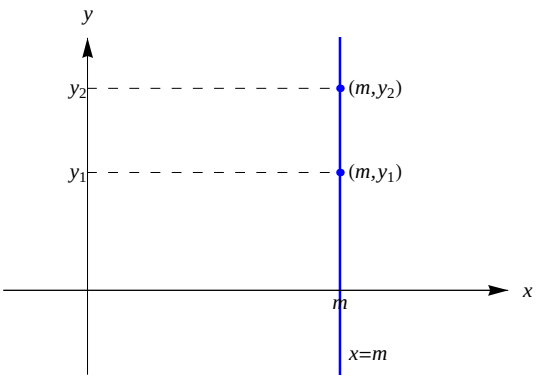




Ha $M_1(x_1, y_1)$ és $M_2(x_2, y_2)$ az $y = b$ egyenes különböző pontjai, ahol x_1 és x_2 olyan valós számok esetén, hogy $x_1 < x_2$, $y_1 = y_2 = b$ lesz érvényes. Az ilyen helyzetű egyenes se nem növekszik, se nem csökken, hiszen bármely valós számra ugyanazt az értéket veszi fel. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = b$ konstans függvény se nem injektív, se nem szürjektív, tehát nem is bijektív, ezért nincs inverz függvénye.

Legyen most $a \neq 0$. Ekkor az $f(x) = ax + b$ lineáris függvény bijektív és grafikonja egy ferde helyzetű egyenes, amelynek egyenlete $y = ax + b$.

Felvetődik a kérdés, hogy vajon a sík bármely egyenese egy lineáris függvény grafikonja-e? A válasz nem, ugyanis az $x = m$ egyenletű függőleges helyzetű, azaz y-tengellyel párhuzamos egyenesen olyan pontok találhatók, mint az (m, y_1) és (m, y_2). Ez pedig azt jelenti, hogy az $x = m$ hozzárendelési szabály nem tesz eleget a leképezés definíciójának (mivel egy eredetihez nem csak egy értéket rendel hozzá), így nem is függvény.



Az $f(x) = ax+b$, $a \neq 0$ lineáris függvény minden valós számra értelmezett, azaz $D_f = \mathbf{R}$. Az f függvény értéke nullában egyenlő a lineáris függvény állandó tagjával, azaz $f(0) = b$. Az f függvény grafikonján tehát mindig rajta van a $(0, b)$ koordinátájú pont, ami egyben azt is jelenti, hogy az $y = ax + b$ egyenes a b pontban metszi az y-tengelyt.
Azt a pontot, ahol az $y = ax+b$ egyenes metszi az x-tengelyt, az f függvény *nullahelyének* nevezzük. Mivel ebben a pontban $y = 0$, így $x = -\dfrac{b}{a}$. Ezért $N\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ az $f(x) = ax+b$ lineáris függvény nullahelye.
Az f függvény *előjele* az a konstans előjelétől függ.

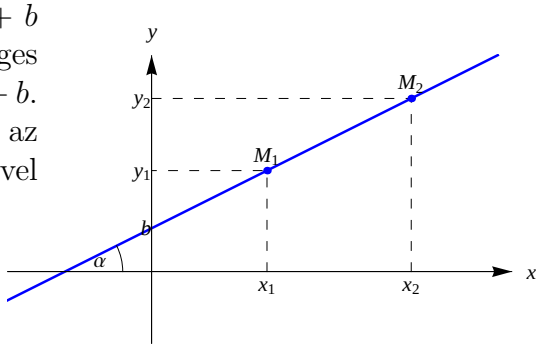
1^o Legyen $a > 0$. Az f függvény pozitív, azaz grafikonja az x-tengely felett helyezkedik el, amennyiben $x > -\dfrac{b}{a}$, és az f függvény negatív, azaz grafikonja az x-tengely alatt helyezkedik el, ha $x < -\dfrac{b}{a}$.

2^o Legyen $a < 0$. Ebben az esetben viszont fordított a helyzet, vagyis az f függvény pozitív, ha $x < -\dfrac{b}{a}$, és az f függvény negatív, amennyiben $x > -\dfrac{b}{a}$.

Az $f(x) = ax + b$ lineáris függvény képletében az $a \neq 0$ állandót az $y = ax + b$ egyenes irányítényezőjének nevezzük. Vizsgáljuk meg az irányítényező geometriai jelentését.

Legyenek $M_1(x_1, y_1)$ és $M_2(x_2, y_2)$ az $y = ax + b$ egyenes különböző pontjai, ahol x_1 és x_2 tetszőleges valós számok, valamint $y_1 = ax_1 + b$ és $y_2 = ax_2 + b$. Ha a második egyenletből kivonjuk az elsőt, akkor az $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ összefüggést kapjuk, és mivel $x_1 \neq x_2$, ezért

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ (= \operatorname{tg} \alpha)\,,$$



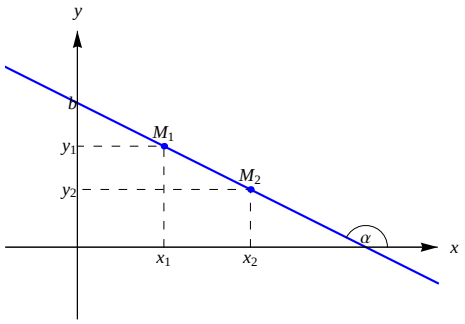
ahol az $y = ax + b$ egyenes α szöget zár be az x-tengely pozitív irányával.

Az f függvény *növekedése*, illetve *csökkenése* szintén az a konstans előjelétől függ.

1^o Tekintsük először az $a > 0$ esetet. Ha most x_1 és x_2 olyan valós számok, hogy $x_1 < x_2$, akkor $y_1 < y_2$ és ebben az esetben azt mondjuk, hogy a függvény *szigorúan monoton*

növekvő a teljes értelmezési tartományon. Vegyük észre, hogy a függvény grafikonja és az x-tengely pozitív iránya által bezárt α szög hegyes szög.

2^o Az $a < 0$ esetet vizsgálva megállapíthatjuk, hogy ha x_1 és x_2 olyan valós számok, hogy $x_1 < x_2$, akkor $y_1 > y_2$ és ebben az esetben azt mondjuk, hogy a függvény *szigorúan monoton csökkenő* a teljes értelmezési tartományon. A függvény grafikonja most az x-tengely pozitív irányával α tompa szöget zár be.



Ha $b = 0$, akkor az $y = ax$ egyenes áthalad az origón. $a = 1$ esetén az $y = x$ egyenes az első és harmadik negyed szimmetriatengelye, $a = -1$ esetén pedig az $y = -x$ egyenes a második és negyedik negyed szimmetriatengelye.

Tekintsük az $f_1(x) = a_1x + b_1$ és $f_2(x) = a_2x + b_2$ függvények grafikonjait. Mivel az f függvény iránytényezője és grafikonjának az x-tengely pozitív irányával bezárt szöge összefüggésben állnak egymással, ezért érvényes a következő, párhuzamos egyenesekre vonatkozó tétel.

1.4. Tétel. *Két különböző egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos, ha iránytényezőik megegyeznek, azaz $a_1 = a_2$, vagy ha mindkettő merőleges az x-tengelyre.*

Merőleges egyenesek esetén a következő állítás érvényes.

1.5. Tétel. *Két különböző egyenes akkor és csakis akkor merőleges egymásra, ha iránytényezőik kielégítik az*

$$a_1a_2 = -1, \quad \left(a_2 = -\frac{1}{a_1}\right)$$

feltételt, vagy ha az egyik egyenes merőleges az x-tengelyre, a másik pedig párhuzamos az x-tengellyel.

A síkbeli egyenes egyenletének *explicit alakja*

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$$

A síkbeli egyenes egyenletének *implicit alakja* az

$$Ax + By + C = 0, \quad A, B, C \in R$$

kétismeretlenes egyenlet, amelyből $B \neq 0$ esetén felírható az egyenes egyenletének explicit alakja, ahol

$$a = -\frac{A}{B} \quad \text{és} \quad b = -\frac{C}{B}, \quad \text{azaz} \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

A $B = 0$ esetben az y-tengellyel párhuzamos egyenesek egyenletét kapjuk, azaz ekkor

$$x = -\frac{C}{A}.$$

FELADATOK.

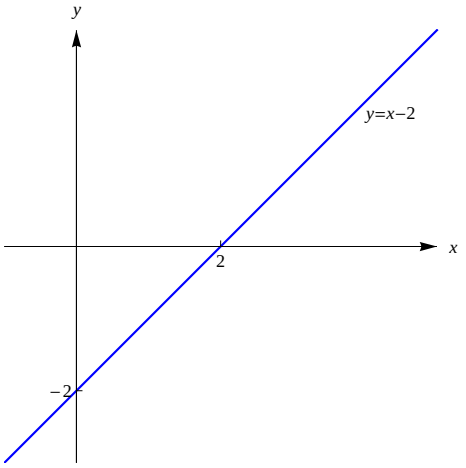
1. Írjuk fel annak a lineáris függvénynek az egyenletét, amely áthalad az $M_1(0,-2)$ és $M_2(4,2)$ pontokon, majd ábrázoljuk a grafikonját és írjuk le a tulajdonságait.

Megoldás. A lineáris függvény általános alakja $f(x)=ax+b$. Ha az M_1 és M_2 pontok rajta vannak az f függvény grafikonján, akkor ezek a pontok kielégítik a megfelelő egyenes egyenletét, vagyis az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} -2 &= a\cdot 0+b \\ 2 &= a\cdot 4+b \end{aligned}$$

Az első egyenletből $b=-2$, a másodikból pedig $a=1$, így a keresett függvény egyenlete

$$f(x)=x-2.$$



Az $y=x-2$ függvénygrafikonról leolvashatjuk a következő tulajdonságokat:

1. A függvény értelmezési tartománya $D_f=\mathbf{R}$.
2. A függvény értékkészlete $R_f=\mathbf{R}$.
3. A függvény nullahelye $x=2$, $x=0$ esetén pedig -2 az értéke. Ez azt jelenti, hogy a függvény grafikonja az $N(2,0)$ pontban metszi az x-tengelyt, s az $M(0,-2)$ pontban metszi az y-tengelyt.
4. $a=1>0$ miatt a függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.
5. $f(x)>0$, ha $x\in(2,+\infty)$, illetve $f(x)<0$, ha $x\in(-\infty,2)$.

2. Határozzuk meg azt a lineáris függvényt, amely párhuzamos az $y=5x-2$ egyenessel és áthalad a $P(-2,3)$ ponton.

Megoldás. Az $y=5x-2$ egyenes irányténye zője $a=5$. A párhuzamosság miatt a keresett $f(x)=ax+b$ lineáris függvény irányténye zője is annyi kell, hogy legyen, azaz $a=5$. Az $f(x)=5x+b$ lineáris függvénynek tartalmaznia kell a $P(-2,3)$ pontot, tehát teljesülnie kell a

$$3=5\cdot(-2)+b$$

egyenletnek, ahonnan $b=13$. A keresett lineáris függvény tehát $f(x)=5x+13$.

3. Az $f(x)=(m-2)x+3-2m$ lineáris függvényben határozzuk meg az m valós paraméter értékét úgy, hogy

a) a függvény grafikonja az y-tengelyt az 5-ben messe,

b) a függvény nullahelye $x=-3$-ban legyen.

Megoldás. *a)* Az $y = ax + b$ egyenes b-ben metszi az y-tengelyt, ezért most $b = 5$ kell legyen. Az adott függvényből ennek alapján $3 - 2m = 5$, ahonnan $2m = -2$, azaz $m = -1$. Mivel $m - 2 = -1 - 2 = -3$, ezért a keresett függvény képlete

$$f(x) = -3x + 5.$$

b) Ha $x = -3$ a nullahely, akkor az $N(-3, 0)$ pont rajta van a keresett függvény grafikonján. Ekkor

$$0 = (m - 2) \cdot (-3) + 3 - 2m, \quad \text{illetve} \quad 0 = -3m + 6 + 3 - 2m.$$

Innen $5m = 9$ és $m = \dfrac{9}{5}$. A keresett függvény grafikonjának explicit alakja tehát

$$y = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5},$$

implicit alakja pedig $x + 5y + 3 = 0$.

4. A $kx + (1 - k)y + 3 = 0$ egyenes egyenletében határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenes párhuzamos legyen a $4x - 2y + 2 = 0$ egyenessel.

Megoldás. Mivel az egyenes iránytényezője az egyenes egyenletének explicit alakjából olvasható ki, ezért alakítsuk át az implicit alakot explicit alakra. Ekkor adódik, hogy $2y = 4x+2$, illetve $y = 2x+1$, így a keresett iránytényező $a = 2$. A paraméteres egyenletet pedig átalakíthatjuk a következő módon:

$$(k - 1)y = kx + 3, \quad \text{illetve} \quad y = \frac{k}{k-1}x + \frac{3}{k-1}.$$

Így az iránytényezőket kiegyenlítve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{k}{k-1} = 2, \quad \text{ahonnan} \quad k = 2k - 2, \quad \text{vagyis} \quad k = 2.$$

A keresett egyenes egyenletet tehát implicit alakban $2x - y + 3 = 0$, illetve explicit alakban $y = 2x + 3$.

5. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $M(5, -2)$ ponton és merőleges a $3x + y - 4 = 0$ egyenesre.

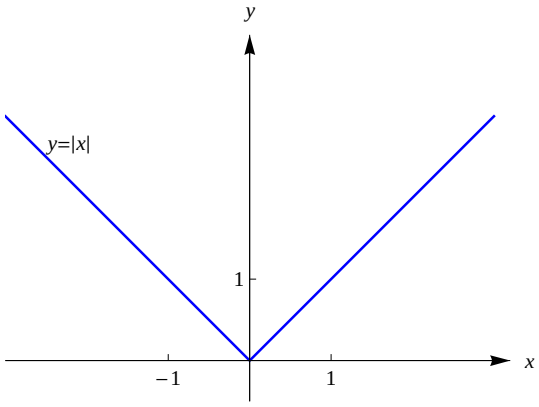
Megoldás. Ha $3x + y - 4 = 0$, akkor ebből $y = -3x + 4$, így az adott egyenes iránytényezője $a_1 = -3$. Ha a keresett egyenes egyenletét $y = a_2x + b_2$ alakban írjuk fel, akkor $a_2 = -\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{3}$, vagyis $y = \dfrac{1}{3}x + b_2$. Ennek az egyenesnek át kell haladnia az $M(5, -2)$ ponton, ezért $-2 = \dfrac{1}{3} \cdot 5 + b_2$, ahonnan $b_2 = -\dfrac{11}{3}$. A keresett egyenes egyenletének explicit alakja tehát $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{11}{3}$, implicit alakja pedig $x - 3y - 11 = 0$.

1.2.2. Szakaszonként egyenesvonalú függvény

E függvények egyszerűségük ellenére nem elemi függvények.

Az abszolút érték függvény. Az $|a|$, $a \in \mathbf{R}$ abszolút érték értelmezése alapján az $f(x) = |x|$ *abszolút érték függvényt* így definiáljuk:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

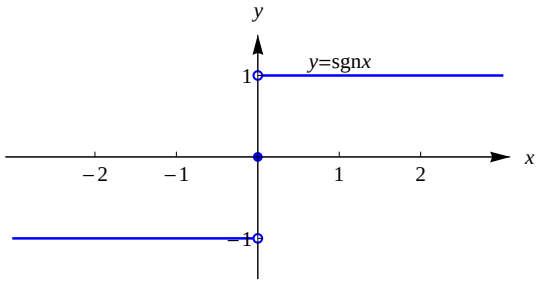


Az f abszolút érték függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete $R_f = [0, \infty)$. Az f függvény grafikonja $y = x$, ha $x \geq 0$ és $y = -x$, ha $x < 0$.

1.26. Példa. $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-3| = 3$.

Az előjel (vagy szignum) függvény. Az x előjelét megadó $f(x) = \operatorname{sgn} x$ *előjel* (vagy *szignum*) *függvényt* a következőképpen definiáljuk:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



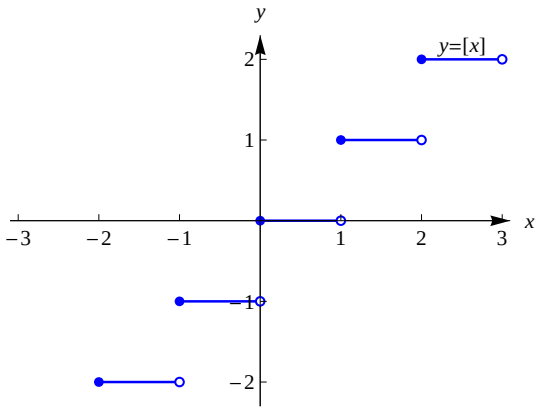
Az f előjel függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete $R_f = \{-1, 0, 1\}$. Az f függvény grafikonja $y = 1$, ha $x > 0$, $y = 0$, ha $x = 0$ és $y = -1$, ha $x < 0$.

1.27. Példa. $\operatorname{sgn} 3 = 1$, $\operatorname{sgn}(-3) = -1$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Az egészrész (vagy entier) függvény. Az $x \in \mathbf{R}$ egész részét megadó $f(x) = [x]$ *egészrész* (vagy *entier*) *függvény* definíciója a következő:

$$[x] = max\{n \in \mathbf{Z} \,|\, n \leq x\},$$

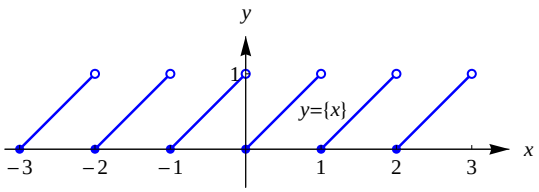
vagyis $[x]$ jelenti az x-nél kisebb vagy vele egyenlő legnagyobb egész számot. Az f egészrész függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete pedig $R_f = \mathbf{Z}$. Az f függvény grafikonja két egész szám között olyan egyenesszakaszokból áll, amelyek párhuzamosak az x-tengellyel, s végpontjaik közül csak a baloldaliak tartoznak a grafikonhoz.



1.28. Példa. $[3.2] = 3$, $[3.001] = 3$, $[-2.4] = -3$, $[3] = 3$.

A törtrész (vagy frac) függvény. Az $x \in \mathbf{R}$ tört részét megadó $f(x) = \{x\}$ *törtrész* (vagy *frac*) *függvény* definíciója a következő:

$$\{x\} = x - [x] = [x] - max\{n \in \mathbf{Z} | \, n \leq x\}.$$



Az f törtrész függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete pedig $R_f = [0, 1)$. Az f függvény grafikonja két egész szám között az x-tengellyel 45^o-os szöget bezáró egyenesszakaszokból áll, a végpontjaik közül csak az x-tengelyen levők tartoznak a grafikonhoz.

1.29. Példa. $\{3.2\} = 0.2$, $\{-3\} = 0$, $\{-2.4\} = 0.6$, $\{2\} = 0$.

FELADATOK.

1. Írjuk fel abszolút érték nélkül, majd rajzoljuk meg az $f(x) = |2x - 4| - 3$ függvény grafikonját, majd a segítségével rajzoljuk meg az $y = ||2x - 4| - 3|$ grafikont is.

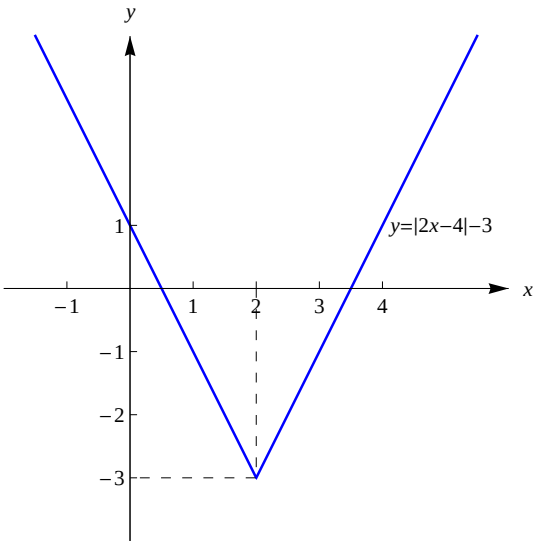
Megoldás. Az abszolút érték definíciója alapján következik, hogy

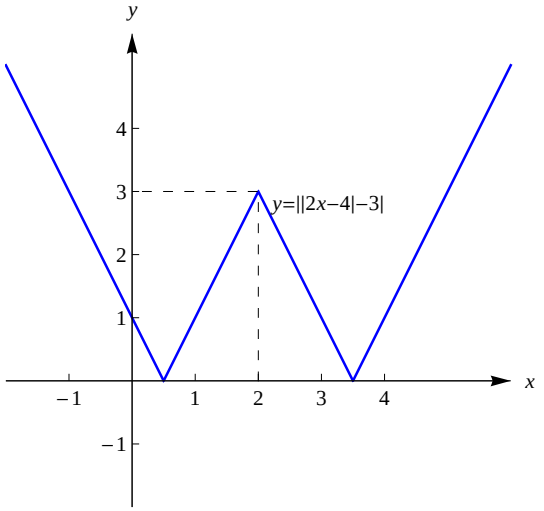
$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & \text{ha } 2x - 4 \geq 0, \\ -(2x - 4), & \text{ha } 2x - 4 < 0. \end{cases} = \begin{cases} 2x - 4, & \text{ha } x \geq 2, \\ -2x + 4, & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

Behelyettesítve a megfelelő egyenletbe és rendezve a kifejezést, valamint megoldva a megfelelő egyenlőtlenségeket adódik, hogy

$$y = |2x - 4| - 3 = \begin{cases} 2x - 7, & \text{ha } x \geq 2, \\ -2x + 1, & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

Ennek grafikonja és az $y = ||2x - 4| - 3|$ függvénygrafikon a következő két ábrán látható. Az abszolút érték a második grafikon esetében azt jelenti, hogy ha a grafikon íve az x-tengely felett van, akkor ott is marad, ha pedig a grafikon íve az x-tengely alatt van, akkor azt a pozitív félsíkra tükrözzük az x-tengelyhez való tengelyes szimmetriával.





2. Rajzoljuk meg az $f(x) = -|x+1| + 2x - 1$ függvény grafikonját és határozzuk meg a nullahelyét.

Megoldás. Mivel

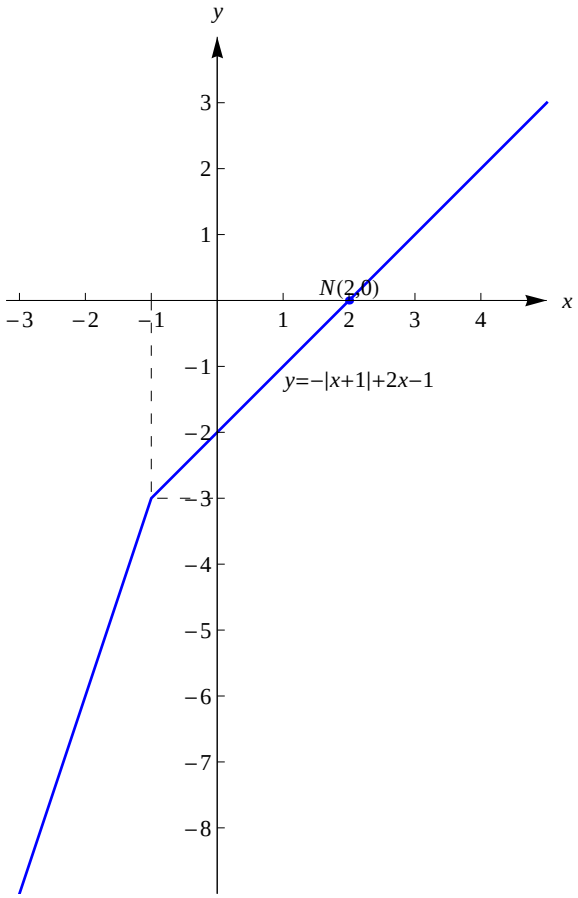
$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x+1 \geq 0, \\ -(x+1), & \text{ha } x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \geq -1, \\ -x-1, & \text{ha } x < -1 \end{cases}$$

ezért rendezés után felírható, hogy

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{ha } x \geq -1, \\ 3x, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

A függvény nullahelyét az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása adja. $x - 2 = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = 2$ és mivel a 2 hozzátartozik a $[-1, \infty)$ intervallumhoz, ez valóban nullahelye a függvénynek. $3x = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = 0$, és mivel a 0 nem tartozik hozzá a $(-\infty, -1)$ intervallumhoz, ezért nem nullahelye a függvénynek. A függvénynek tehát csak egy nullahelye van, az $N(2, 0)$ pont.

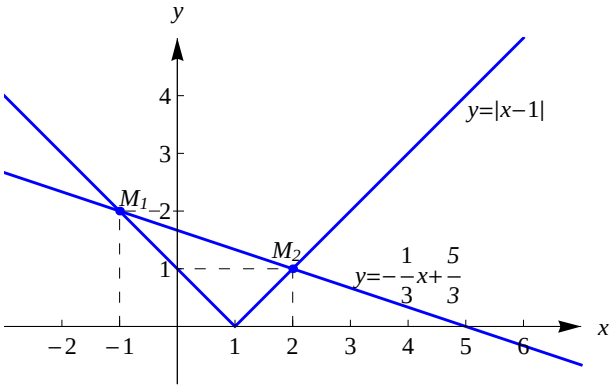


3. Oldjuk meg az $|x-1| = \frac{1}{3}(5-x)$ egyenletet.

Megoldás. Oldjuk meg grafikusan a feladatot oly módon, hogy megrajzoljuk az

$$y = |x-1| \quad \text{és} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

függvénygrafikonokat ugyanabban a koordinátarendszerben és megkeressük a metszéspontjaikat.



Mivel

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x-1 \geq 0, \\ -(x-1), & \text{ha } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

ezért az egyik megoldást az $y = 1-x$ és az $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ egyenesek metszéspontjából,

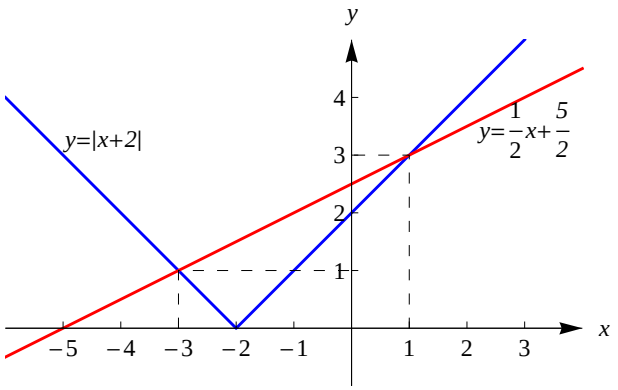
a másik megoldást pedig az $y = x-1$ és az $y = -\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ egyenesek metszéspontjából olvashatjuk le. Mivel ezek a metszéspontok az $M_1(-1,2)$ és $M_2(2,1)$ pontok, ezért az egyenlet megoldásai $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.

4. Oldjuk meg az $|x+2| \le \frac{1}{2}(x+5)$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Rajzoljuk meg ugyanabban a koordinátarendszerben az

$$y = |x+2| \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

függvénygrafikonokat, majd számítsuk ki a metszéspontokat és olvassuk le, hogy mely intervallumon van az $y = |x+2|$ grafikonja az $y = \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ grafikonja alatt. Az egyik metszéspontot az $x+2 = \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ egyenletből számítjuk ki, ahonnan $x = 1$, a másik metszéspontot az $-x-2 = \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ egyenlet megoldása adja, ahonnan $x = -3$. A grafikonról leolvashatjuk, hogy az $y = |x+2|$ függvény grafikonja a $[-3,1]$ intervallumon az $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ függvény grafikonja alatt van, ezért az $|x+2| \le \frac{1}{2}(x+5)$ egyenlőtlenség megoldása a $[-3,1]$ intervallum, azaz a megoldáshalmaz



$$M = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \le x \le 1\}.$$

5. Hány megoldása van a $2 - |x+1| = a$ egyenletnek az a valós paraméter különböző értékeire?

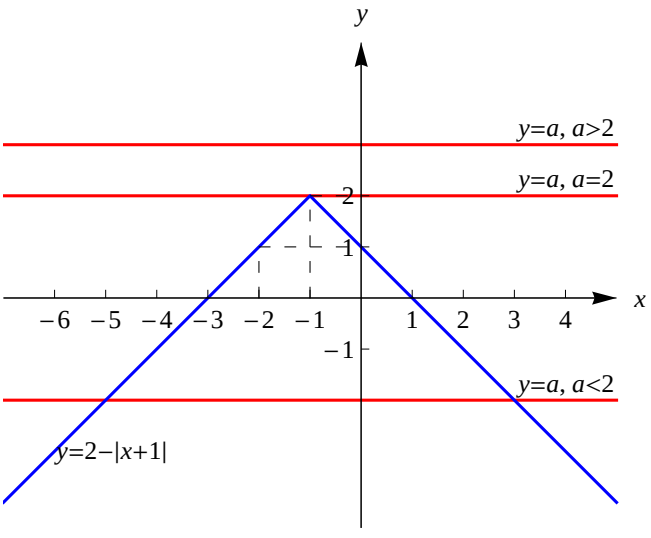
Megoldás. Mivel az abszolút érték felbontása után

$$2-|x+1| = \begin{cases} 1-x, & \text{ha } x \ge -1, \\ x+3, & \text{ha } x < -1, \end{cases}$$

ezért ha megrajzoljuk az

$$y = 2 - |x+1|$$

függvény grafikonját, valamint az $y = a$ vízszintes helyzetű egyeneseket különböző $a \in \mathbf{R}$ értékekre, akkor a grafikonról leolvashatjuk a megoldást:



1^o $a > 2$ esetén az egyenletnek nincs megoldása,

2^o $a = 2$ esetén az egyenletnek 1 megoldása van,

3^o $a < 2$ esetén az egyenletnek 2 megoldása van.

1.2.3. Hatványfüggvény

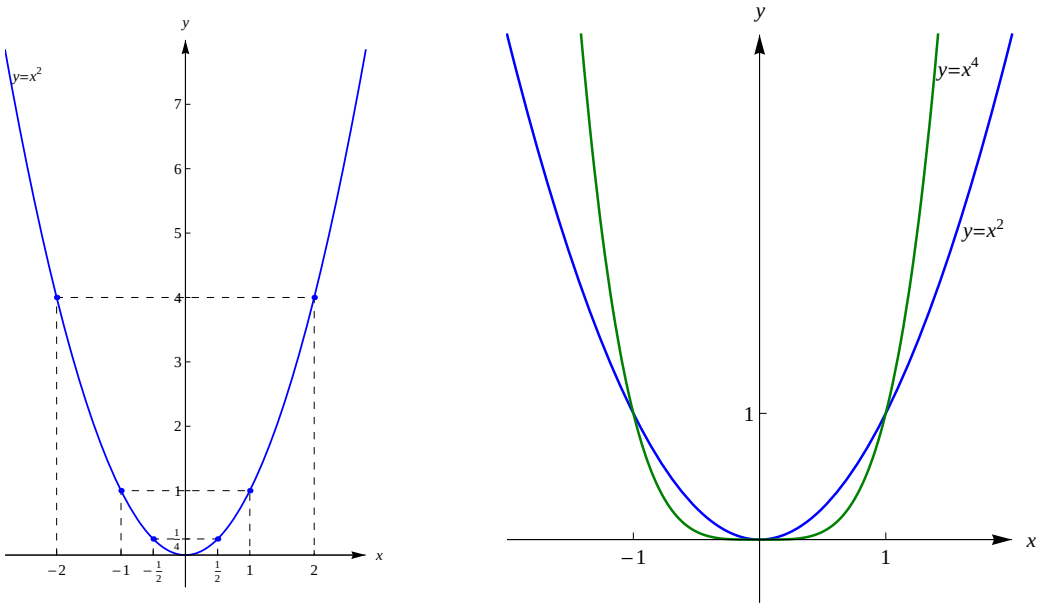
1.33. Definíció. *Azt az* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *valós függvényt, melyet az*

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbf{N}$$

hozzárendeléssel adunk meg, természetes kitevőjű hatványfüggvénynek nevezzük.

Tekintsünk először néhány kokrét esetet.
Az $f(x) = x$ függvény grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenes.
Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja parabola. Készítsünk értéktáblázatot és a kapott pontok segítségével rajzoljuk fel ezt a görbét.

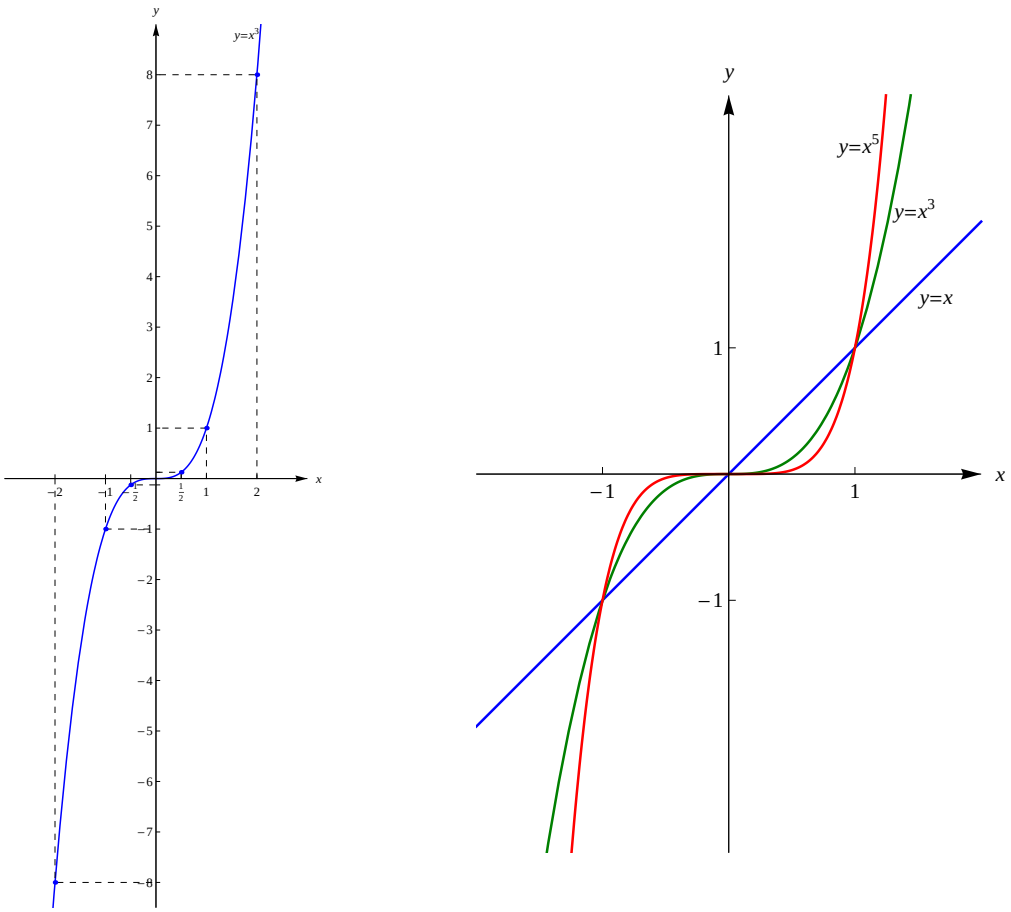
x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
x^2	4	1	0.25	0	0.25	1	4



Az $f(x) = x^2$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete $R_f = [0, \infty)$, nullahelye pedig az origó, azaz az $N(0, 0)$ pont. Az f függvény jellegzetes tulajdonsága, hogy $f(-x) = f(x)$, ami miatt a függvény grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre. Ugyanilyen tulajdonságokkal rendelkezik minden $f(x) = x^{2n}$, azaz páros kitevőjű hatványfüggvény, ha $n \in \mathbf{N}$. A mellékelt ábrán megfigyelhetjük az $y = x^2$ és az $y = x^4$ parabolák közötti viszonyt.
A páros kitevőjű függvényre érvényes, hogy minden x valós számra $f(-x) = f(x)$, és emiatt nevezünk minden olyan f függvényt párosnak, amelyekre $f(-x) = f(x)$ teljesül. A páros függvények grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre.

Rajzoljuk most fel az $f(x) = x^3$ függvény grafikonját, amelyet harmadfokú parabolának is szokás nevezni. Készítsünk értéktáblázatot és a kapott pontok segítségével rajzoljuk fel ezt a görbét.

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
x^3	-8	-1	-0.125	0	0.125	1	8



Az $f(x) = x^3$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$, nullahelye pedig az origó, azaz az $N(0, 0)$ pont. Az f függvény jellegzetes tulajdonsága, hogy $f(-x) = -f(x)$, ami miatt a függvény grafikonja szimmetrikus az origóra. Ugyanilyen tulajdonságokkal rendelkezik minden $f(x) = x^{2n-1}$, azaz páratlan kitevőjű hatványfüggvény, ha $n \in \mathbf{N}$. A mellékelt ábrán megfigyelhetjük az $y = x^3$ és az $y = x^5$ harmadfokú parabolák közötti viszonyt.

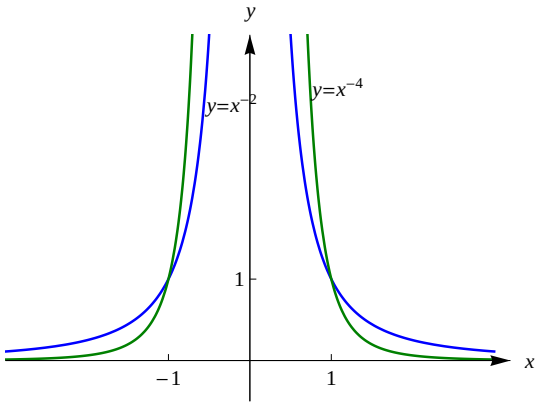
A páratlan kitevőjű függvényre érvényes, hogy minden x valós számra $f(-x) = -f(x)$, és emiatt nevezünk minden olyan f függvényt páratlannak, amelyekre $f(-x) = -f(x)$ teljesül. A páratlan függvények grafikonja szimmetrikus az origóra.

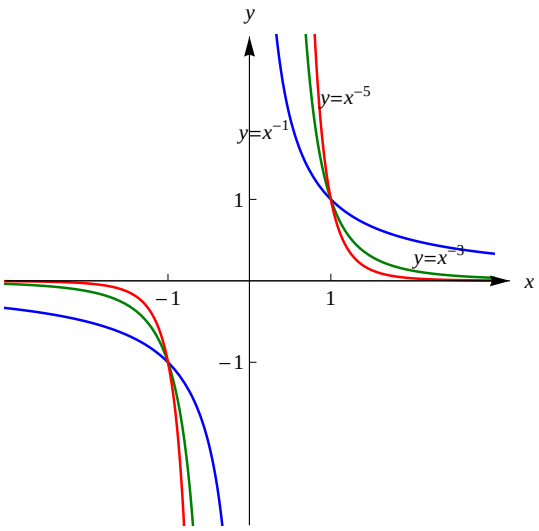
Bővítsük ki a hatványfüggvény fogalmát negatív egész kitevőkre, azaz tekintsük az

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

függvényeket. Értelmezési tartományuk $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, nullahelyük nincs. Páros kitevők esetén a függvények párosak és értékkészletük $R_f = (0, \infty)$, páratlan kitevők esetén pedig a függvények páratlanok és értékkészletük $R_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

A következő két ábrán az $n = 2$ és $n = 4$, valamint az $n = 1$, $n = 3$ és $n = 5$ eset látható.





Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt a $D_f = [0, \infty)$ értelmezési tartományon. Ekkor az f függvény értékkészlete $R_f = [0, \infty)$ és f bijektív, vagyis létezik inverze. Az f^{-1} inverz függvényt az

$$x = \left(f^{-1}(x)\right)^2$$

egyenletből kapjuk, ahonnan $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Az f^{-1} függvény grafikonját az f függvény grafikonjának $y = x$ tengelyre való tükrözésével kapjuk. Az $y = \sqrt{x}$ függvénygrafikonról leolvashatjuk, hogy a függvény csak nemnegatív számokra értelmezett, szigorúan monoton növekvő és pozitív a teljes értelmezési tartományon. Hasonlóan jutunk el az $y = x^{2n}$ függvénygrafikonok fogalmához is, melyek tulajdonságaikban is teljes hasonlóságot mutatnak az $y = \sqrt{x}$ grafikon tulajdonságaival.

Tekintsük most az $f(x) = x^3$ függvényt a $D_f = \mathbf{R}$ értelmezési tartományon. Ekkor az f függvény értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$ és f bijektív, vagyis létezik inverze. Az f^{-1} inverz függvényt az

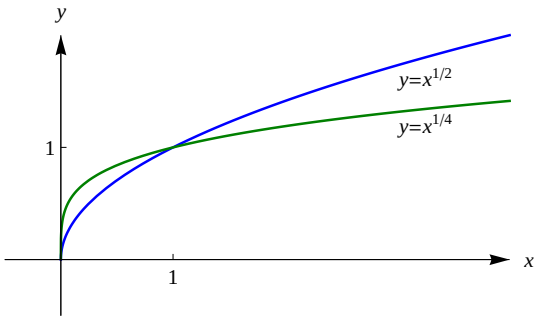
$$x = \left(f^{-1}(x)\right)^3$$

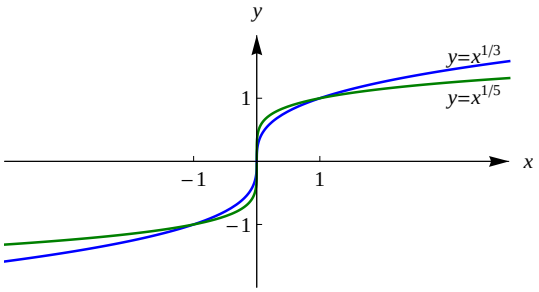
egyenletből kapjuk, ahonnan $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Az f^{-1} függvény grafikonját az f függvény grafikonjának $y = x$ tengelyre való tükrözésével kapjuk. Az $y = \sqrt[3]{x}$ függvénygrafikonról leolvashatjuk, hogy a függvény minden valós számra értelmezett, szigorúan monoton növekvő a teljes értelemzési tartományon, az origóban van nullahelye és grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra, vagyis páratlan függvényről van szó. Hasonlóan jutunk el az $y = x^{2n+1}$ függvénygrafikonok fogalmához is, melyek tulajdonságaikban teljes hasonlóságot mutatnak az $y = \sqrt[3]{x}$ grafikon tulajdonságaival.

Bővítsük most a hatványfüggvény fogalmát racionális kitevőjű hatványfüggvényekre, azaz tekintsük az

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbf{N}$$

típusú függvényeket.
A következő két ábrán az $n = 2$ és $n = 4$, valamint az $n = 3$ és $n = 5$ eset látható.





1.2.4. Másodfokú függvény

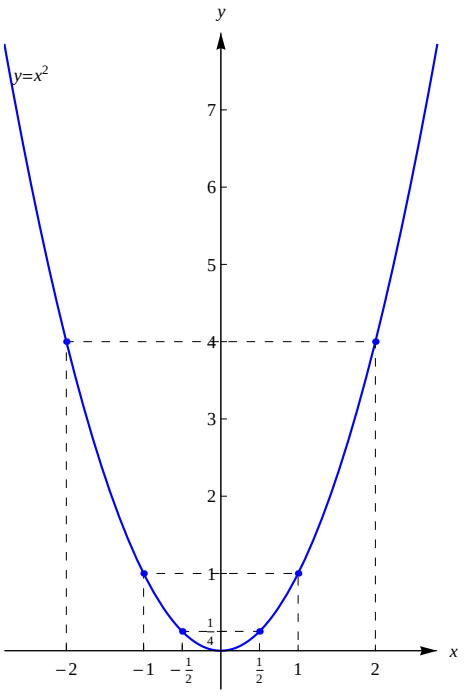
1.34. Definíció. *Legyenek* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *és* $a \neq 0$. *Az* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *valós függvényt, melyet az*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hozzárendeléssel adunk meg, másodfokú függvénynek nevezzük. Azt a síkgörbét, amelynek az egyenlete $y = ax^2 + bx + c$, *másodfokú parabolának, vagy röviden csak parabolának nevezzük.*

A másodfokú függvény legegyszerűbb alakja $a = 1$, valamint $b = c = 0$ esetén az $f(x) = x^2$ függvény, amelynek grafikonját már rajzoltuk, s amelyből különböző függvénytranszformációk segítségével az összes többi parabola is felrajzolható. Az alábbi ábrán a már ismert $y = x^2$ parabola látható, s erről leolvashatjuk az $f(x) = x^2$ függvény tulajdonságait.

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [0, \infty)$.
3. Nullahelye: $x = 0$.
4. Előjele: $f(x) > 0$, ha $x \neq 0$.
5. f szigorúan monoton csökkenő, ha $x < 0$,
   f szigorúan monoton növekvő, ha $x > 0$.
6. $x = 0$-ban a függvénynek minimuma van és $f_{min}(0) = 0$.
7. A grafikonnak az y-tengely szimmetriatengelye.
8. A függvény grafikonja felfelé nyíló (konvex) parabola.



Az $f(x) = kx^2$, $f(x) = kx^2 + n$, $f(x) = (x + m)^2$ és $f(x) = k(x + m)^2 + n$ függvények grafikonjai olyan parabolák, melyeket az $y = x^2$ parabola transzformációival kaphatunk x-, illetve y-tengelyek irányában történő eltolásokkal, valamint zsugorítással és nyújtással.

Vizsgáljuk meg hogyan ábrázolhatnánk a legegyszerűbben az $f(x) = ax^2+bx+c$ függvény grafikonját tetszőleges $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ együtthatók esetén.

A parabolának vagy nincs közös pontja az x-tengellyel (a függvénynek nincs nullahelye), vagy van egy közös érintési pontja az x-tengellyel (a függvénynek egy nullahelye van), vagy pedig két különböző közös pontjuk van, amelyekben a parabola átmetszi az x-tengelyt (a függvénynek két nullahelye van). A nullahelyek száma az $f(x) = 0$ egyenlet, illetve az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet $D = b^2 - 4ac$ diszkriminánsától függ. Legyenek x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei.

- $D > 0$ esetén a függvénynek két különböző nullahelye van, $x_1 \in \mathbf{R}$ és $x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, melyekben a függvény grafikonja átmetszi az x-tengelyt.
- $D = 0$ esetén a függvénynek egy nullahelye van, $x_1 = x_2 \in \mathbf{R}$, melyben a függvény grafikonja alulról vagy felülről érinti az x-tengelyt.
- $D < 0$ esetén a függvénynek nincs nullahelye, $x_1 \notin \mathbf{R}$ és $x_2 \notin \mathbf{R}$, a függvény grafikonja vagy teljes egészében az x-tengely felett vagy pedig alatta helyezkedik el.

A másodfokú függvény grafikonjának másik jellegzetes pontja a parabola csúcspontja, amely $a > 0$ esetén minimumpont, $a < 0$ esetén pedig maximumpont. (Gondoljunk például az $y = x^2$ parabola nullahelyére, amely egyben ennek a parabolának minimumpontja is.) A csúcspontot T jelöli, koordinátáit pedig a másodfokú függvény kanonikus alakjából olvashatjuk le.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Mivel minden $x \in \mathbf{R}$ számra $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, ezért

$$a > 0 \quad \text{esetén} \quad ax^2 + bx + c \geq \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad \text{és}$$

$$a < 0 \quad \text{esetén} \quad ax^2 + bx + c \leq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $a > 0$ esetben a parabolának T minimumpontja van, $a < 0$ esetben pedig T maximumpontja, mégpedig

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

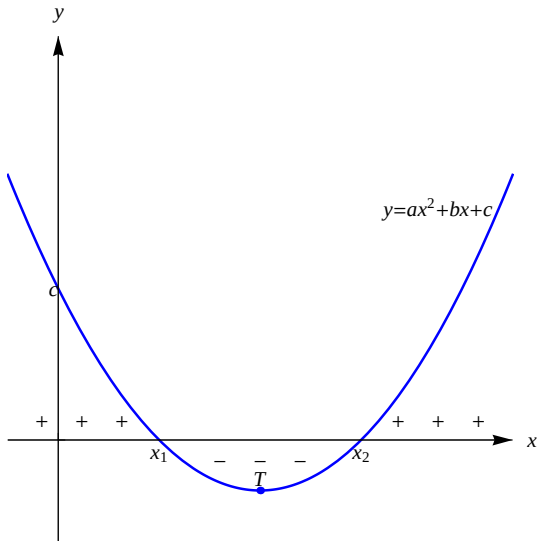
A kanonikus alakból az is megállapítható, hogy az

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = k(x+m)^2 + n$$

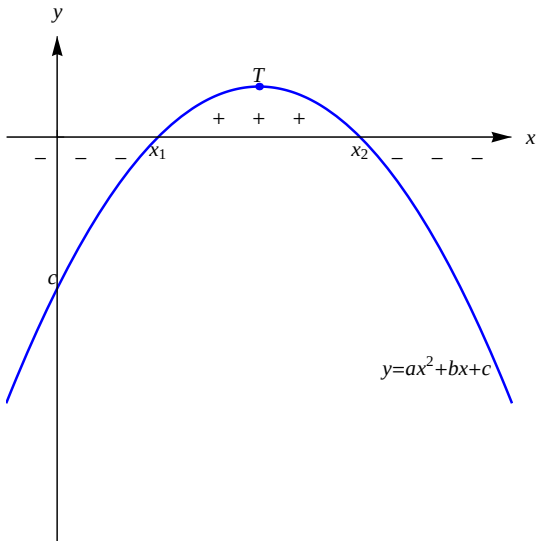
parabola függvénytranszformációk segítségével is megrajzolható.

A másodfokú függvény olyan tulajdonságai, mint az értelmez'esi tartomány, értékkészlet, nullahely, előjel, minimum- vagy maximumpont, monotonitás, paritás (párosság vagy páratlanság), konvexitás, a kivizsgált tulajdonságok alapján a grafikonról mindig leolvashatók.

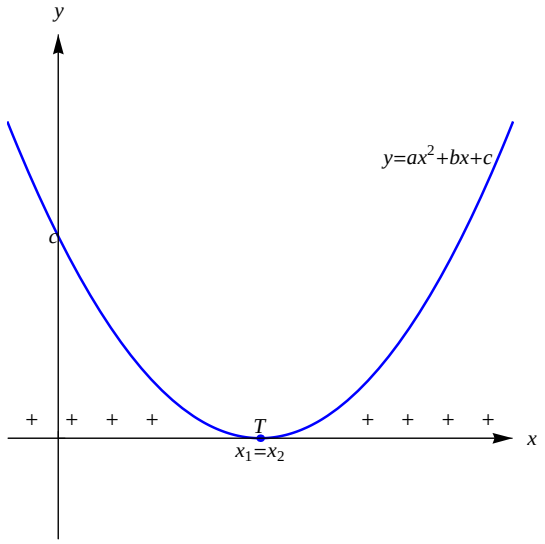
Összesítve az elmondottakat, a parabola különböző helyzetei a koordinátarendszerben az alábbi ábrákon láthatók.



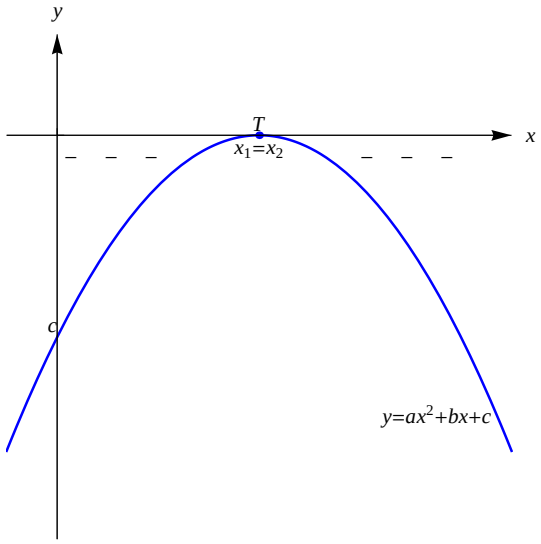
$a > 0, \quad D > 0$



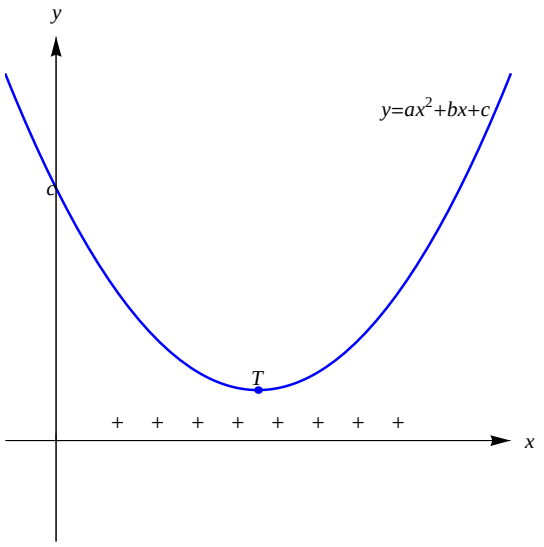
$a < 0, \quad D > 0$



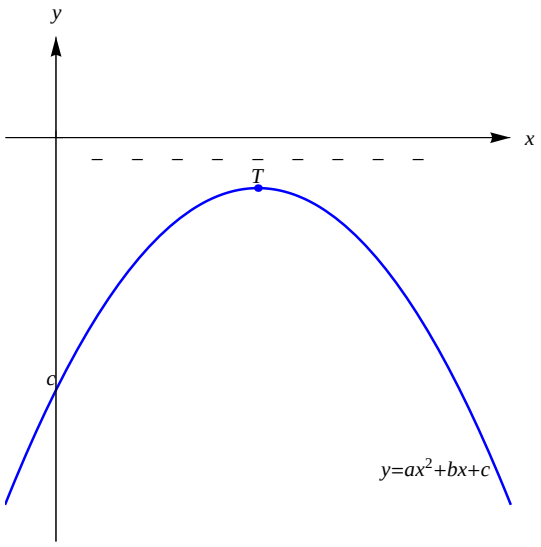
$a > 0, \quad D = 0$



$a < 0, \quad D = 0$



$a > 0, \quad D < 0$



$a < 0, \quad D < 0$

Általánosan elmondható, hogy az f másodfokú függvény grafikonja $a > 0$ esetén felfelé nyíló (konvex) parabola, $a < 0$ esetén pedig lefelé nyíló (konkáv) parabola.

Ugyanakkor megállapítható az is, hogy

– $a > 0$ esetén az f függvény

- szigorúan monoton csökkenő a $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ intervallumon és
- szigorúan monoton növekvő a $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ intervallumon,

– $a < 0$ esetben viszont az f függvény

- szigorúan monoton növekvő a $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ intervallumon és
- szigorúan monoton csökkenő a $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ intervallumon.

FELADATOK.

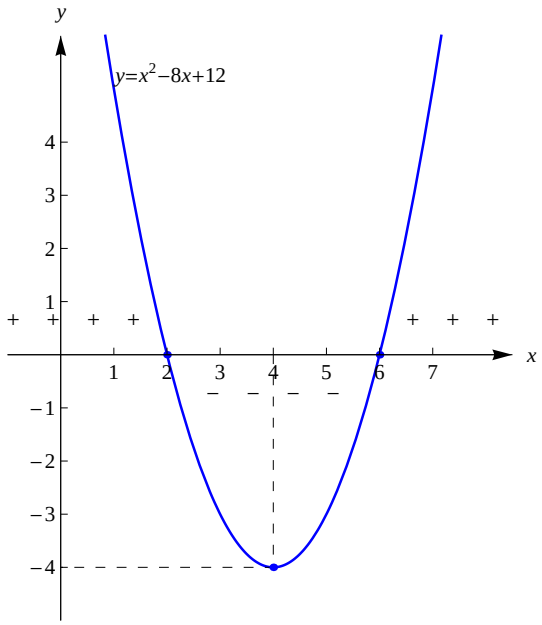
1. Rajzoljuk meg az $f(x) = x^2 - 8x + 12$ másodfokú függvény grafikonját és írjuk le a tulajdonságait.

Megoldás. Az f függvény nullahelyeit az $x^2 - 8x + 12 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk, így $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$ a két nullahely. Mivel $a = 1 > 0$, ezért a függvény grafikonja felfelé nyíló parabola, minimumpontja pedig

$$T_{min}\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T_{min}(4, -4).$$

A függvény grafikonja és tulajdonságai:

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [-4, \infty)$.
3. Nullahelyei: $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$.
4. Előjele:
   $f(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$
   $f(x) < 0$, ha $x \in (2, 6)$.
5. A függvénynek minimuma van és $T_{min}(4, -4)$.
6. f szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in (-\infty, 4)$,
   f szigorúan monoton növekvő, ha $x \in (4, \infty)$.
7. Az f függvény grafikonja felfelé nyíló (konvex) parabola.



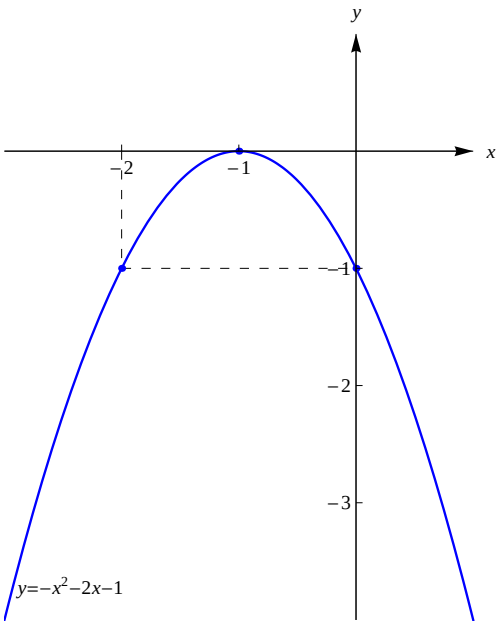
2. Vizsgáljuk ki az $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ másodfokú függvényt, rajzoljuk meg a grafikonját.

Megoldás. Az f függvény nullahelyeit az $-x^2 - 2x - 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei adják, most viszont $x_1 = x_2 = -1$ ezért csak egy nullahelye van. Mivel $a = -1 < 0$, ezért a függvény grafikonja lefelé nyíló parabola, maximumpontja pedig

$$T_{max}\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T_{max}(-1, 0).$$

A függvény grafikonja és tulajdonságai:

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [-\infty, 0)$.
3. Nullahelye: $x = -1$.
4. Előjele:
   $f(x) < 0$, ha $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.
5. A függvénynek maximuma van és $T_{max}(-1, 0)$.
6. f szigorúan monoton növekvő, ha $x \in (-\infty, -1)$,
   f szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in (-1, \infty)$.
7. Az f függvény grafikonja lefelé nyíló (konkáv) parabola.



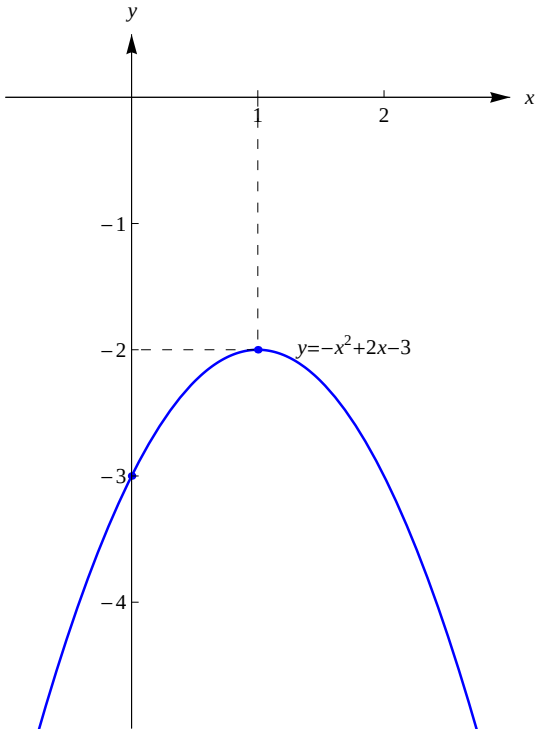
3. Vizsgáljuk ki az $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ másodfokú függvényt, és ábrázoljuk a koordinátarendszerben.

Megoldás. A függvénynek nullahelyei nincsenek, mert a $-x^2+2x-3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei most nem valós számok. Mivel $a = -1 < 0$, ezért a függvény grafikonja lefelé nyíló parabola, maximumpontja pedig

$$T_{max}\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = T_{max}(1,-2).$$

A függvény grafikonja és tulajdonságai:

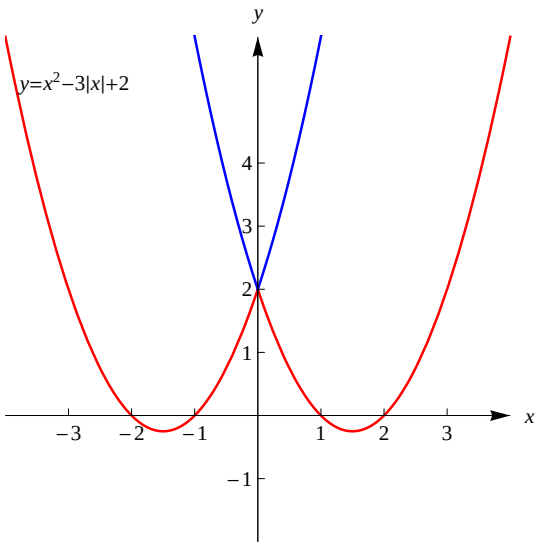
1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [-\infty, -2)$.
3. Nullahelye nincs.
4. Előjele: $f(x) < 0$, ha $x \in \mathbf{R}$.
5. A függvénynek maximuma van és $T_{max}(1,-2)$.
6. f szigorúan monoton növekvő, ha $x \in (-\infty, 1)$,
   f szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in (1, \infty)$.
7. Az f függvény grafikonja lefelé nyíló (konkáv) parabola.



4. Rajzoljuk meg az $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$ függvény grafikonját.
Megoldás. Írjuk fel a függvényt abszolút érték nélkül. Ekkor

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{ha } x \geq 0, \\ x^2 + 3x + 2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Rajzoljuk meg ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét parabolát, majd jelöljük meg az $y = x^2 - 3x + 2$ parabolaívet $x \geq 0$ értékekre, az $y = x^2 + 3x + 2$ parabolaívet pedig $x < 0$ értékekre.



5. Rajzoljuk meg az $f(x) = -|x^2 - 4x| - 3$ függvény grafikonját.

Megoldás. Először írjuk fel a függvényt abszolút érték nélkül. Vegyük észre, hogy az $x^2-4x = x(x-4)$ szorzat előjele táblázattal könnyen kivizsgálható. Mivel

D_f	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
x^2-4x	$+$	$-$	$+$

$$|x^2 - 4x| = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty), \\ -(x^2 - 4x), & \text{ha } x \in (0, 4), \end{cases}$$

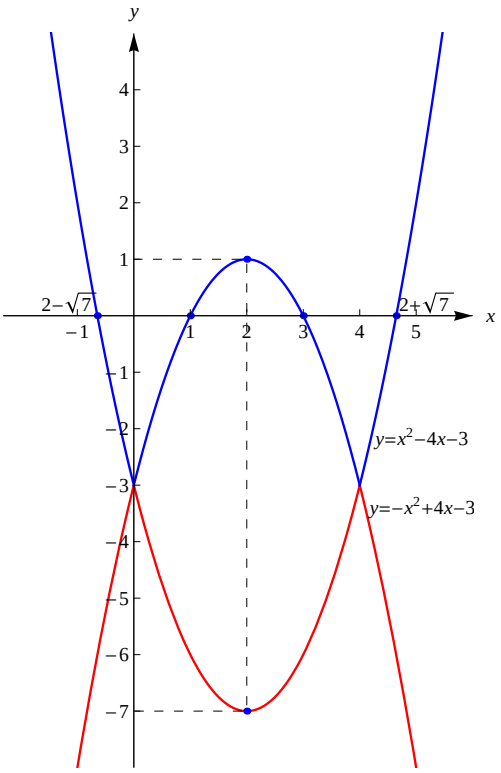
ezért

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty), \\ x^2 - 4x - 3, & \text{ha } x \in [0, 4]. \end{cases}$$

Az $-x^2 + 4x - 3 = 0$ egyenletből kapjuk, hogy $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$ az $y = -x^2 + 4x - 3$ konkáv parabola nullahelyei, csúcspontja pedig $T_{max}(2, 1)$.

Az $x^2 - 4x - 3 = 0$ egyenletből kapjuk, hogy $x_1 = 2 - \sqrt{7}$ és $x_2 = 2 + \sqrt{7}$ az $y = x^2 - 4x - 3$ konvex parabola nullahelyei, csúcspontja pedig $T_{min}(2, -7)$.

Rajzoljuk most meg ugyanabban a koordinátarendszerben az $y = -x^2 + 4x - 3$ parabolát és az $y = x^2 - 4x - 3$ parabolát is. A keresett grafikont úgy kapjuk meg, hogy a konkáv parabolából vesszük a $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ intervallumokhoz tartozó íveket, a konvex parabolából pedig a $[0, 4]$ intervallumhoz tartozó ívet. A függvény grafikonja a mellékelt ábrán látható.



6. Bontsuk fel a $p \in \mathbf{R}^+$ számot két összeadandóra úgy, hogy az összeadandók szorzata a lehető legnagyobb legyen.

Megoldás. Ha az egyik összeadandót x-szel jelöljük, akkor a másik összeadandó $p - x$. Ezek szorzata $f(x) = x(p - x) = -x^2 + px$ egy olyan másodfokú függvény, amelynek maximuma van, tehát egy ilyen szorzat valóban elérheti a legnagyobb értékét. Mivel

$$f_{max}\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad \text{ezért} \quad f_{max}\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$$

a keresett szorzat legnagyobb értéke. Ez azt jelenti, hogy a szorzat akkor a legnagyobb, ha a p számot $p = \frac{p}{2} + \frac{p}{2}$ módon bontjuk összegre, mert akkor a $\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$ a lehető legnagyobb szorzat.

7. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+4}$ függvény lehető legnagyobb értékét.

Megoldás. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+4} = \dfrac{1}{g(x)}$ függvény legnagyobb értékét azokban a pontokban kapjuk meg, ahol a $g(x) = x^2+2x+4$ függvénynek az értéke legkisebb. A g függvénynek nincsenek valós gyökei, mert diszkriminánsa $D = -12 < 0$, és mivel főegyütthatója $a = 1 > 0$, ezért neki minimuma van, így minden valós számra pozitív értéket vesz fel. Mivel $g(x) = x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$, ezért $g_{min}(-1) = 3$, tehát a nevező lehető legkisebb értéke 3. Mivel $g(x) > 0$ minden x valós számra, ezért az $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ is mindig pozitív, és érvényes, hogy $f_{max}(-1) = \dfrac{1}{g_{min}(-1)} = \dfrac{1}{3}$, vagyis az f függvény lehető legnagyobb értéke $\dfrac{1}{3}$. Eszerint

$$0 < f(x) \le \frac{1}{3}, \quad \text{minden} \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{esetén.}$$

8. Legyenek x_1 és x_2 az $f(x) = -x^2+(m-2)x+m+1$ másodfokú függvény nullahelyei. Az m valós paraméter mely értékére lesz az nullahelyek négyzetösszege a lehető legnagyobb?

Megoldás. Az $f(x) = -x^2+(m-2)x+m+1$ másodfokú függvény x_1 és x_2 nullahelyei egyben a $-x^2+(m-2)x+m+1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei. Alkalmazzuk a Viète-képleteket az $x_1^2+x_2^2$ négyzetösszeg kifejezésére. Ekkor

$$x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{(m-2)^2}{1} - 2\cdot\frac{m+1}{-1} =$$

$$= (m-2)^2 + 2(m+1) = m^2-2m+6 = (m-1)^2+5,$$

ezért

$$(x_1^2+x_2^2)_{max} = 5, \quad \text{ha} \quad m = 1,$$

vagyis a keresett négyzetösszeg lehető legnagyobb értéke 5, ha az m valós paraméter értéke 1.

9. Legyen $f(x) = (k-2)x^2-2kx+k-3$ másodfokú függvény. Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy az f függvény mindkét nullahelye pozitív valós szám legyen.

Megoldás. Ahhoz, hogy az f függvény nullahelyei valós számok legyenek, a diszkrimináns, $D = 4k^2-4(k-2)(k-3) = 20k-24$, nem lehet negatív, ezért $D \ge 0$, illetve $20k-24 \ge 0$ kell hogy teljesüljön, ahonnan $k \ge \dfrac{6}{5}$. Ha mindkét nullahely pozitív, akkor az összegük és szorzatuk is pozitív, azaz

$$x_1+x_2 \ge 0 \quad \text{és} \quad x_1\cdot x_2 \ge 0.$$

A feladat feltétele tehát teljesül, ha k kielégíti az alábbi egyenlőtlenségrendszert:

$$k \ge \frac{6}{5}, \quad \frac{2k}{k-2} \ge 0 \quad \text{és} \quad \frac{k-3}{k-2} \ge 0.$$

A megoldást az alábbi táblázatból olvashatjuk le:

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{6}{5}\right)$	$\left(\frac{6}{5}, 2\right)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
k	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$5k-6$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$k-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$k-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{2k}{k-2}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{k-3}{k-2}$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$

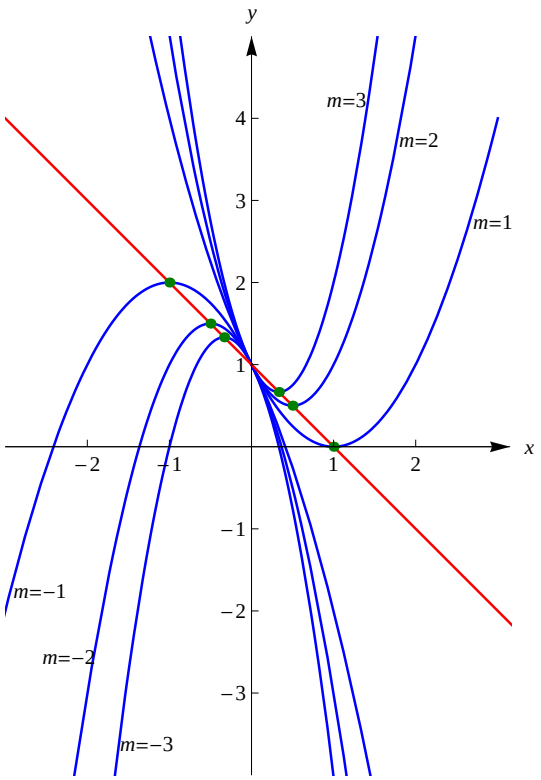
A táblázatból látható, hogy a kívánt egyenlőtlenségrendszert a $(3, \infty)$ intervallumba tartozó k paraméterértékek elégítik ki. Tehát az adott f másodfokú függvény mindkét nullahelye pozitív valós szám, ha $k > 3$.

10. Határozzuk meg az $y = mx^2 - 2x + 1$ parabolasereg csúcspontjainak mértani helyét, ha $m \in \mathbf{R}$.

Megoldás. Mivel a parabola csúcspontjainak koordinátái minden esetben

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T\left(\frac{1}{m}, \frac{m-1}{m}\right),$$

így az $x = \frac{1}{m}$ és $y = \frac{m-1}{m}$ egyenletrendszerből az m paraméter eliminálásával kapjuk a keresett egyenletet. Mivel $x = \frac{1}{m}$, ebből $m = \frac{1}{x}$. Behelyettesítve az $y = \frac{m-1}{m}$ kifejezésbe adódik az $y = 1 - x$ egyenlet. Ez azt jelenti, hogy az $f(x) = mx^2 - 2x + 1$ másodfokú függvénycsalád csúcspontjai a különböző $m \in \mathbf{R}$ paraméterek esetén az $y = 1 - x$ egyenesen helyezkednek el.



1.2.5. Exponenciális függvény

1.35. Definíció. *Exponenciális függvénynek nevezzük azt az* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ *valós függvényt, amelyet az*

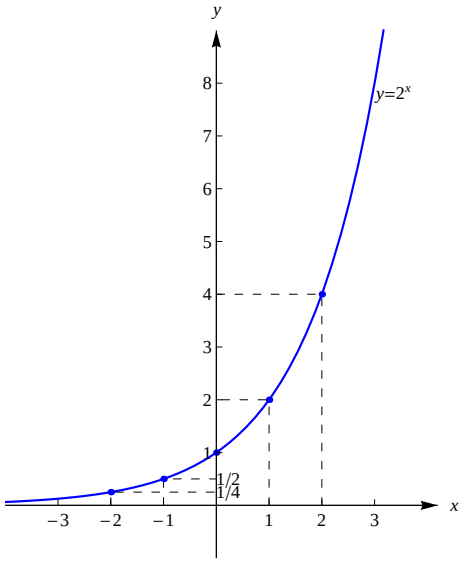
$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbf{R}$$

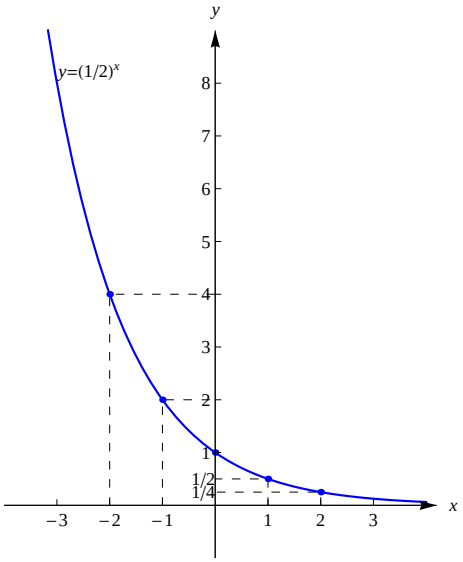
hozzárendelési szabállyal adunk meg, ahol $a > 0$ *és* $a \neq 1$.

Az exponenciális függvény grafikonját legegyszerűbben egy értéktáblázat segítségével rajzolhatjuk meg, amelyben $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ abszcissza értékeknek megfelelő pontok benne kell, hogy legyenek ahhoz, hogy a helyes ábrát meg tudjuk rajzolni.
Az exponenciális függvény grafikonja $0 < a < 1$ és $a > 1$ esetén különböző alakú. A két alapesetet az $y = 2^x$ és az $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ grafikonjaival szemléltetjük. Készítsük el az értéktáblázatokat és a kapott pontok segítségével rajzoljuk fel a görbéket, majd vizsgáljuk ki tulajdonságaikat.

x	-2	-1	0	1	2
2^x	0.25	0.5	1	2	4

x	-2	-1	0	1	2
2^{-x}	4	2	1	0.5	0.25





Az exponenciális függvény tulajdonságai:

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = (0, \infty)$.
3. Nullahelye nincs.
4. A függvény pozitív a teljes értelmezési tartományon.
5. $a > 1$ esetén a függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.
6. $0 < a < 1$ esetén a függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományon.
7. A függvény konvex a teljes értelmezési tartományon.

8. Az $y = 0$ egyenes a görbe vízszintes aszimptotája.
(*Aszimptotának* nevezzük az olyan egyeneseket, amelyekhez a függvény görbéje fokozatosan közelít, de nem éri el.)

1.2.6. Logaritmusfüggvény

Mivel az exponenciális függvény bijektív, ezért invertálható és inverz függvényét logaritmusfüggvénynek nevezzük.

1.36. Definíció. *Logaritmusfüggvénynek nevezzük azt az* $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ *valós függvényt, amelyet az*

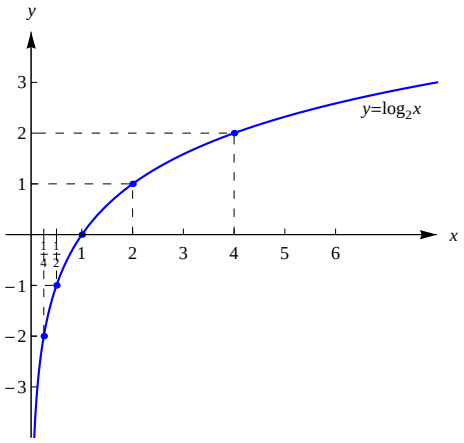
$$f(x) = \log_a x, \quad x \in \mathbf{R}^+$$

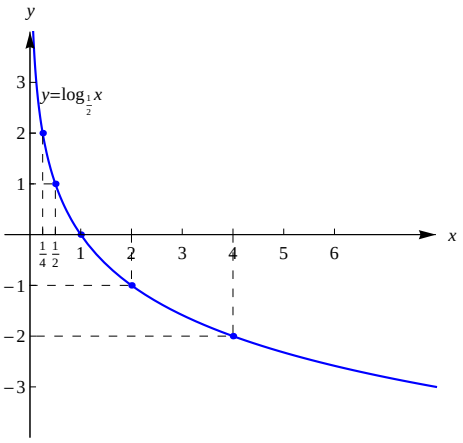
hozzárendelési szabállyal adunk meg, ahol $a > 0$ *és* $a \neq 1$.

A logaritmusfüggvény grafikonját kétféleképpen kaphatjuk meg. A megfelelő exponenciális függvény grafikonjának az $y = x$ egyeneshez való tengelyes tükrözésével vagy értéktáblázat segítségével, amelybe az $y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ordináta értékeknek megfelelő pontokat választjuk.
A logaritmusfüggvény grafikonja $0 < a < 1$ és $a > 1$ esetén különböző alakú. A két alapesetet az $y = \log_2 x$ és az $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ grafikonjaival szemléltetjük. Készítsük el ezeket az értéktáblázatokat és a kapott pontok segítségével rajzoljuk fel a görbéket, majd vizsgáljuk ki tulajdonságaikat.

x	0.25	0.5	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

x	4	2	1	0.5	0.25
$\log_{\frac{1}{2}} x$	-2	-1	0	1	2





A logaritmusfüggvény tulajdonságai:

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}^+$.

2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.

3. Nullahelye $x = 1$.

4. $a > 1$ esetén a függvény negatív a $(0, 1)$ intervallumon, és pozitív a $(1, \infty)$ intervallumon.

5. $0 < a < 1$ esetén viszont a függvény pozitív a $(0, 1)$ intervallumon, és negatív a $(1, \infty)$ intervallumon.

6. $a > 1$ esetén a függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.

7. $0 < a < 1$ esetén a függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományon.

8. $a > 1$ esetén a függvény konvex a teljes értelmezési tartományon.

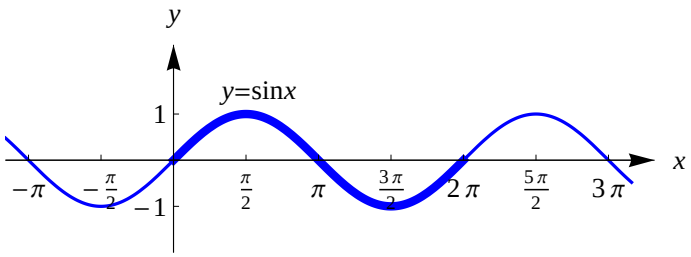
9. $0 < a < 1$ esetén a függvény konkáv a teljes értelmezési tartományon.

10. Az $x = 0$ egyenes a görbe függőleges aszimptotája.

1.2.7. Trigonometrikus függvények

A $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ i $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvényeket trigonometrikus függvényeknek nevezzük. A trigonometrikus függvények periodikusak, mert mindegyik esetén van olyan ω pozitív valós szám, amelyre $f(x + \omega) = f(x)$.

Az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja és tulajdonságai:



1. A függvény minden valós számra értelmezett, azaz $D_f = \mathbf{R}$.

2. A függvény értékkészlete az $R_f = [-1, 1]$ intervallum.

3. A függvény alapperiódusa $\omega_0 = 2\pi$, azaz $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. A függvény páratlan, vagyis $\sin(-x) = -\sin x$.

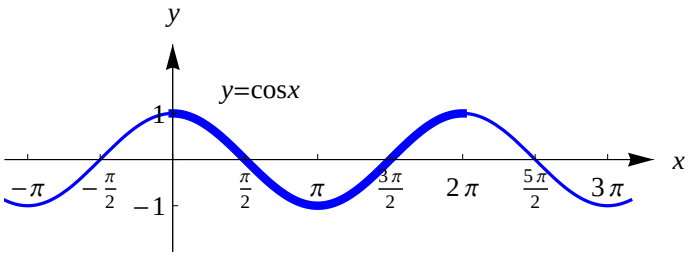
5. A függvény nullahelyei az $x = k\pi$ pontok, $k \in \mathbf{Z}$.

6. A függvény pozitív a $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ és negatív a $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

7. A függvény szigorúan monoton növekvő a $\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ és szigorúan monoton csökkenő a $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

8. A függvénynek $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$ pontokban maximuma, a $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, -1\right)$ pontokban pedig minimuma van, $k \in \mathbf{Z}$.

Az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja és tulajdonságai:



1. A függvény minden valós számra értelmezett, azaz $D_f = \mathbf{R}$.

2. A függvény értékkészlete az $R_f = [-1, 1]$ intervallum.

3. A függvény alapperiódusa $\omega_0 = 2\pi$, azaz $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. A függvény páros, vagyis $\cos(-x) = \cos x$.

5. A függvény nullahelyei a $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ pontok, $k \in \mathbf{Z}$.

6. A függvény pozitív a $\left(2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$ intervallumokon és negatív a $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

7. A függvény szigorúan monoton csökkenő a $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ intervallumokon és szigorúan monoton növekvő a $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

8. A függvénynek a $(2k\pi, 1)$ pontokban maximuma, és a $(\pi + k\pi, -1)$ pontokban minimuma van.

Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonja és tulajdonságai:

1. A függvény értelmezési tartománya

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

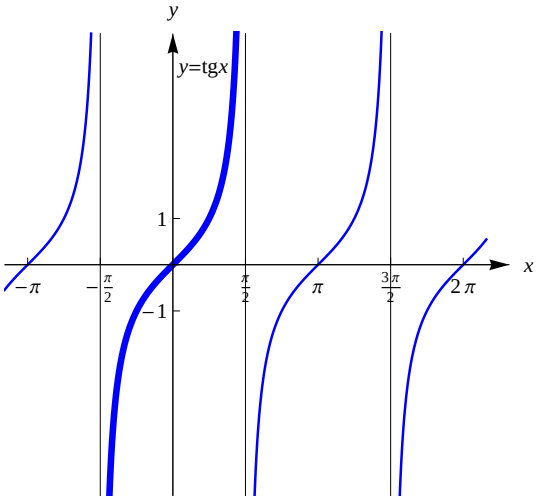
2. A függvény értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$.

3. A függvény alapperiódusa $\omega_0 = \pi$, azaz $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. A függvény páratlan, vagyis

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

5. A függvény nullahelyei a $k\pi$ pontok, $k \in \mathbf{Z}$.



6. A függvény pozitív a $\left(k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ és negatív a $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

7. A függvény szigorúan monoton növekvő a $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

8. A függvénynek nincs se maximuma, se minimuma.

9. A függvény függőleges aszimptotái az $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$ egyenesek, $k \in \mathbf{Z}$.

Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény grafikonja és tulajdonságai:

1. A függvény értelmezési tartománya

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

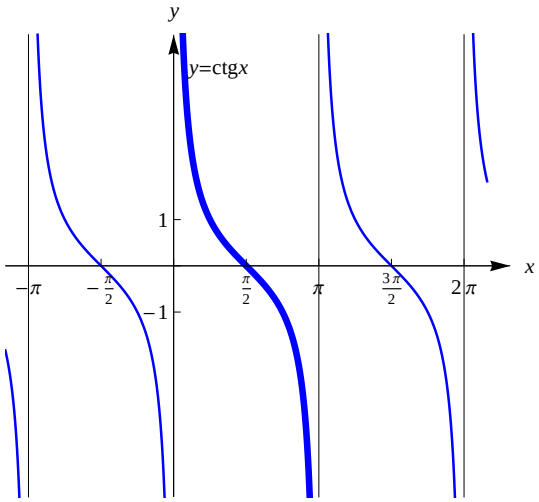
2. A függvény értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$.

3. A függvény alapperiódusa $\omega_0 = \pi$, azaz $\operatorname{ctg}(x+k\pi) = \operatorname{ctg} x$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. A függvény páratlan, vagyis

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

5. A függvény nullahelyei a $\frac{\pi}{2}+k\pi$ pontok, $k \in \mathbf{Z}$.



6. A függvény pozitív a $\left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ intervallumokon és negatív a $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \pi+k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

7. A függvény szigorúan monoton csökkenő a $(k\pi, \pi+k\pi)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

8. A függvénynek nincs se maximuma, se minimuma.

9. A függvény függőleges aszimptotái az $x = k\pi$ egyenesek, $k \in \mathbf{Z}$.

1.2.8. Árkuszfüggvények

A trigonometrikus függvények periodikusak, ezért a teljes értelmezési tartományukon nem bijektívek, tehát nem invertálhatók. Bizonyos intervallumokon azonban szigorúan monotonok, ezért ott invertálhatók is. Az ilyen módon értelmezett inverz függvényeket *árkuszfüggvényeknek* vagy *ciklometrikus függvényeknek* nevezzük.

Az *árkusz szinusz függvény* a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra szűkített $f(x) = \sin x$ függvény inverze,

$$f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

1. Értelmezési tartománya: $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$.

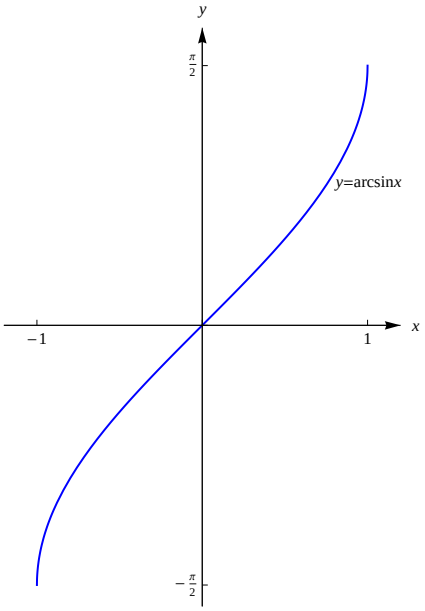
2. Értékkészlete: $R_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Nullahelye $x = 0$.

4. A függvény páratlan.

5. Görbéje az $y = \sin x$ függvénygörbe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartozó darabjának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével állítható elő.

6. Az $f^{-1}(x) = \arcsin x$ függvény szigorúan monoton növekvő.



Az *árkusz koszinusz függvény* a $[0, \pi]$ intervallumra szűkített $f(x) = \cos x$ függvény inverze,

$$f^{-1}(x) = \arccos x.$$

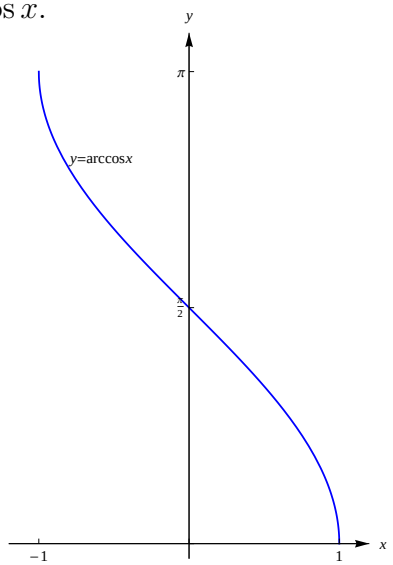
1. Értelmezési tartománya: $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$.

2. Értékkészlete: $R_{f^{-1}} = [0, \pi]$.

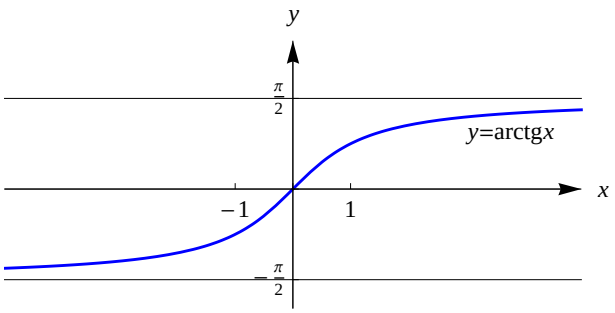
3. Nullahelye $x = 1$.

4. Görbéje az $y = \cos x$ függvénygörbe $[0, \pi]$ intervallumhoz tartozó darabjának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével állítható elő.

5. Az $f^{-1}(x) = \arccos x$ függvény szigorúan monoton csökkenő.



Az *árkusz tangens függvény* a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumra szűkített $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény inverze. Jelölése: $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.



1. Értelmezési tartománya: $D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$.

2. Értékkészlete: $R_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Nullahelye $x = 0$.

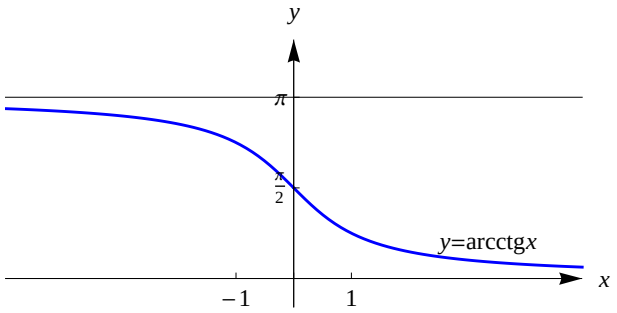
4. A függvény páratlan.

5. Görbéje az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumhoz tartozó görbéjének az $y = x$ egyenesre való tükrözésével állítható elő.

6. Az $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományán.

7. Az $y = -\frac{\pi}{2}$ és az $y = \frac{\pi}{2}$ egyenesek a függvény vízszintes aszimptotái.

Az *árkusz kotangens függvény* a $(0, \pi)$ intervallumra szűkített $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény inverze. Jelölése: $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$.



1. Értelmezési tartománya: $D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$.

2. Értékkészlete: $R_{f^{-1}} = (0, \pi)$.

3. Görbéje az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény $(0, \pi)$ intervallumhoz tartozó görbéjének az $y = x$ egyenesre való tükrözésével állítható elő.

4. Nullehelye nincs.

5. Az $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományán.

6. Az $y = 0$ és az $y = \pi$ egyenesek a függvény vízszintes aszimptotái.

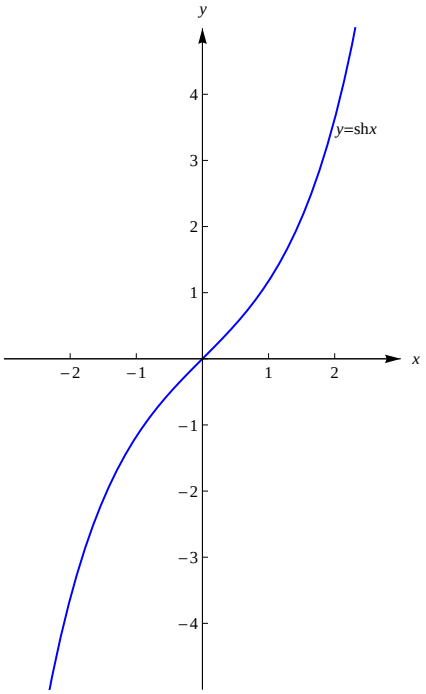
1.2.9. Hiperbolikus függvények

Az exponenciális függvény segítségével értelmezzük a *hiperbolikus függvényeket.*
A *szinusz hiperbolikusz függvényt*

$$f(x) = \operatorname{sh} x$$

módon jelöljük, hozzárendelési törvénye pedig a következő:

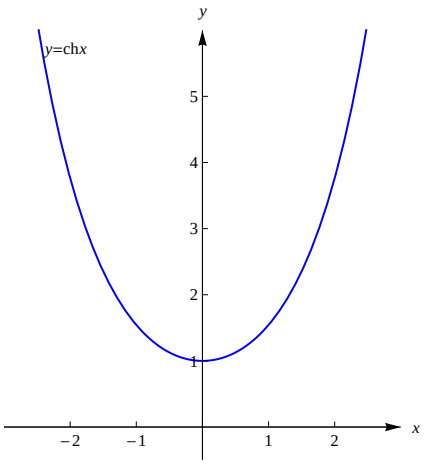
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$



1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.
3. Nullahelye $x = 0$.
4. A függvény páratlan.
5. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.

A *koszinusz hiperbolikusz függvényt* $f(x) = \operatorname{ch} x$ módon jelöljük, hozzárendelési törvénye pedig

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

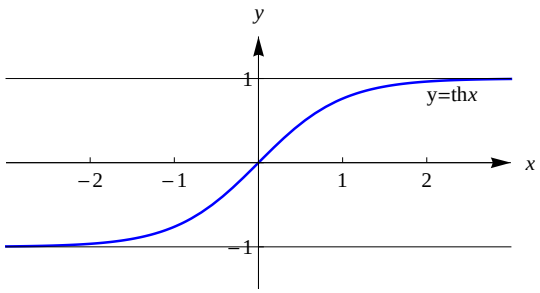


1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [1, \infty)$.
3. Nullahelye nincs.
4. A függvény páros.
5. A függvény szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, 0)$ intervallumon és szigorúan monoton növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon.

Az $y = \operatorname{ch} x$ görbét *láncgörbének* is nevezik, mert a súlyos kábelek, láncok, kötelek, amelyeket két pontban felfüggesztünk úgy, hogy a pontok egymásközti távolsága kisebb a huzal vagy kötél hosszúságánál, akkor a "belógás" éppen a láncgörbe ívét követi.

A *tangens hiperbolikusz függvényt* $f(x) = \operatorname{th} x$ módon jelöljük, hozzárendelési törvénye pedig

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$



1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.

2. Értékkészlete: $R_f = (-1, 1)$.

3. Nullahelye $x = 0$.

4. A függvény páratlan.

5. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.

6. Az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenesek a függvény vízszintes aszimptotái.

A *kotangens hiperbolikusz függvényt* $f(x) = \operatorname{cth} x$ módon jelöljük, hozzárendelési törvénye pedig

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

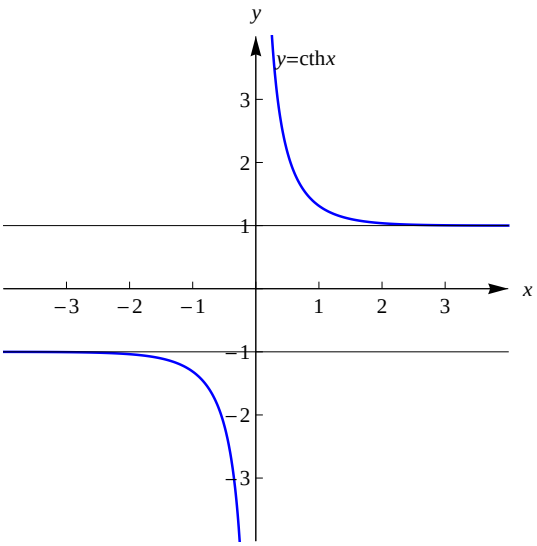
2. Értékkészlete:
$R_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

3. Nullahelye nincs.

4. A függvény páratlan.

5. A függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományon.

6. Az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenesek a függvény vízszintes aszimptotái.



A hiperbolikus függvényekre a trigonometrikus függvényekhez hasonló összefüggések, azonosságok érvényesek. Ezek közül a következők jól használhatók a hiperbolikus függvényekkel kapcsolatos problémák megoldásához.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}.$$

1.2.10. Áreafüggvények

A hiperbolikus függvények inverzeit *áreafüggvényeknek* nevezzük. Görbéiket előállíthatjuk a hiperbolikus függvények görbéiből, ha azokat az $y = x$ egyenesre tükrözzük.

Az *área szinusz hiperbolikusz függvény* az $f(x) = \operatorname{sh} x$ függvény inverze, jelölése

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x.$$

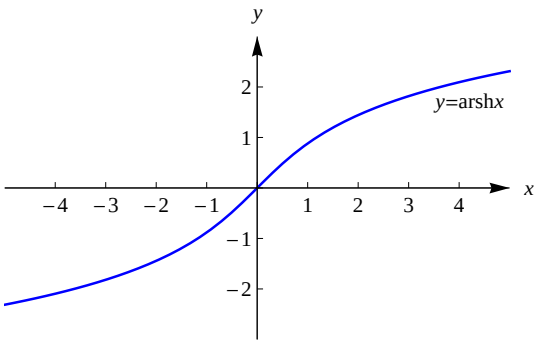
Az inverzfüggvény képzése alapján előállíthatjuk az $f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x$ függvényt a logaritmusfüggvény segítségével. Ha

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{akkor} \quad x = \frac{e^{f^{-1}(x)} - e^{-f^{-1}(x)}}{2}.$$

Ebből adódik, hogy

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.
3. Nullahelye $x = 0$.
4. A függvény páratlan.
5. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.



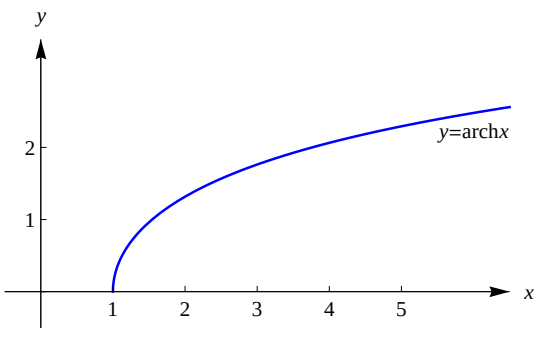
Az *área koszinusz hiperbolikusz függvény* az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény inverze, jelölése

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arch} x,$$

logaritmikus alakja pedig

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

1. Értelmezési tartománya: $D_f = [1, \infty)$.
2. Értékkészlete: $R_f = [0, \infty)$.
3. Nullahelye $x = 1$.
4. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.



Az *área tangens hiperbolikusz függvény* az

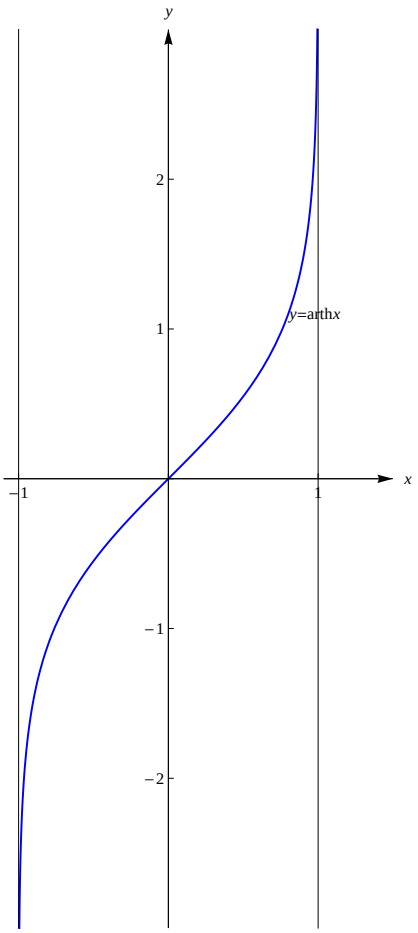
$$f(x) = \mathrm{th} x$$

függvény inverze, jelölése

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arth} x,$$

logaritmikus alakja pedig

$$\operatorname{arth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$



1. Értelmezési tartománya: $D_f = (-1, 1)$.

2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.

3. Nullahelye $x = 0$.

4. A függvény páratlan.

5. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.

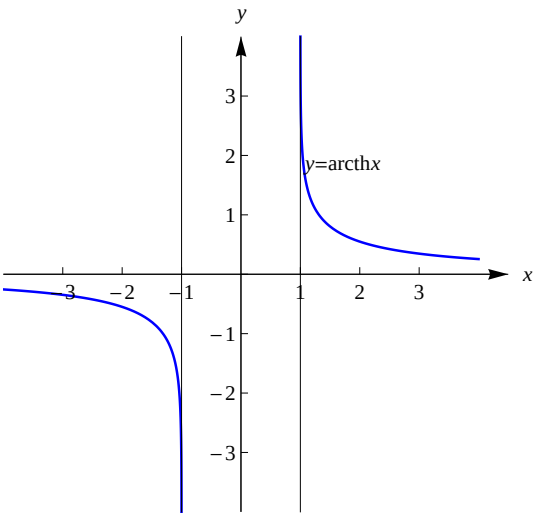
6. Az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenesek a függvény függőleges aszimptotái.

Az *área kotangens hiperbolikusz függvény* az $f(x) = \operatorname{cth} x$ függvény inverze, jelölése

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcth} x,$$

logaritmikus alakja pedig

$$\operatorname{arcth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$



1. Értelmezési tartománya:
$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

3. Nullahelye nincs.

4. A függvény páratlan.

5. A függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományon.

6. Az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenesek a függvény függőleges aszimptotái.

1.3. Elemi függvények és transzformációik

Az *elemi alapfüggvények* csoportjába tartoznak a *konstans függvények*, a *hatványfüggvények*, az *exponenciális függvények*, a *logaritmusfüggvények*, a *trigonometrikus függvények* és a *ciklometrikus függvények*.

1.37. Definíció. 1^o *Az elemi alapfüggvények elemi függvények.*

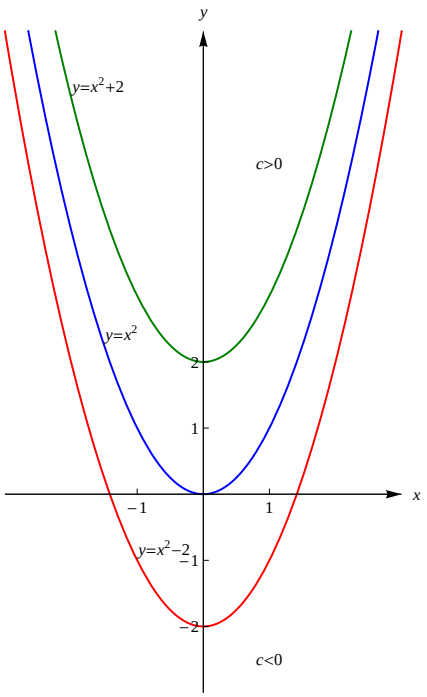
2^o *Ha f és g elemi függvények, akkor $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ és $f\circ g$ is elemi függvények (feltéve, hogy értelmezettek).*

3^o *Az elemi függvényeket az előző két szabály véges számú alkalmazásával kapjuk.*

Az elemi függvényeket feloszthatjuk *algebrai* és *transzcendens függvényekre*. Egy függvényt algebrai függvénynek nevezünk, ha számokból és az x változóból véges sok összeadás, szorzás, osztás és gyökvonás útján jön létre. Az algebrai függvényeket feloszthatjuk *racionális egész függvényekre (polinomokra)*, *racionális törtfüggvényekre* és *irracionális függvényekre (nem racionális algebrai függvényekre)*. A nem algebrai függvényeket *transzcendens függvényeknek* nevezzük. Transzcendens függvények az exponenciális függvények, logaritmusfüggvények, trigonometrikus függvények, ciklometrikus függvények, hiperbolikus függvények és az áreafüggvények.

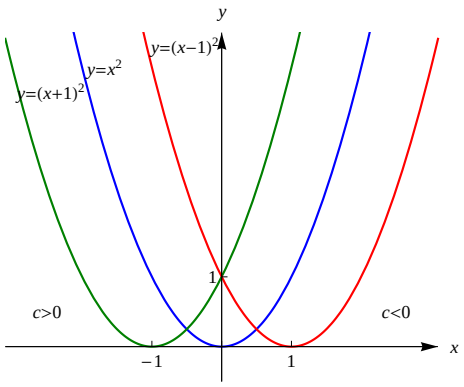
A következőkben megmutatunk négyféle elemi függvénytranszformációt.

1^o Az $y=f(x)+c$ függvénygrafikont az $y=f(x)$ grafikon y-tengely irányú $|c|$ távolságú transzlációjával jön létre. Ha $c>0$, akkor a transzláció az y-tengely pozitív iránya felé történik. Ha $c<0$, akkor a függvény grafikonját y-tengely negatív iránya felé toljuk.
Az alábbi ábrán az $y=x^2$ parabola két y-tengely irányú eltolása látható, az egyik pozitív, a másik negatív irányba.



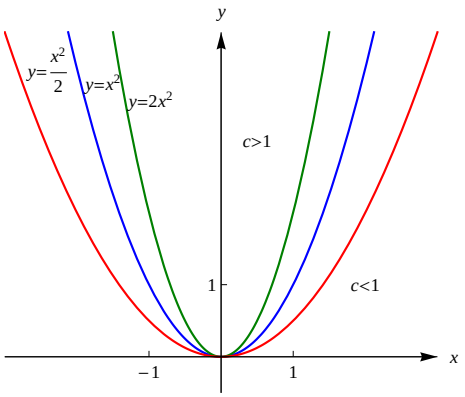
$$y = f(x) + c$$

2^o Az $y = f(x + c)$ függvénygrafikon az $y = f(x)$ grafikon x-tengely irányú $|c|$ távolságú transzlációjával jön létre. Ha $c > 0$, akkor a transzláció az x-tengely negatív iránya felé történik. Ha $c < 0$, akkor a függvény grafikonját x-tengely pozitív iránya felé toljuk. A mellékelt ábrán az $y = x^2$ parabola két x-tengely irányú transzlációja látható.



$y = f(x + c)$

3^o Az $y = c \cdot f(x)$ függvénytranszformációt az $y = f(x)$ függvényértékek $c \neq 0$ állandóval való szorzásával kapjuk. Az $y = c \cdot f(x)$ és $y = f(x)$ függvényeknek ugyanaz az értelmezési tartományuk és ugyanazok a nullahelyei. Pozitív konstans esetén a függvények előjele és monotonitása megegyezik, ha pedig a konstants negatív, akkor a függvények előjele és monotonitása ellentétes.

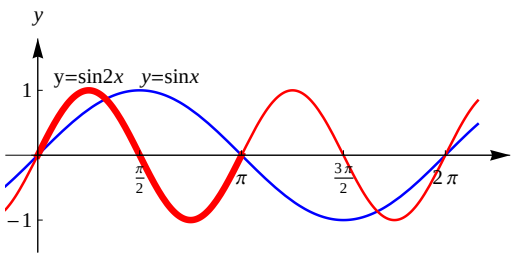


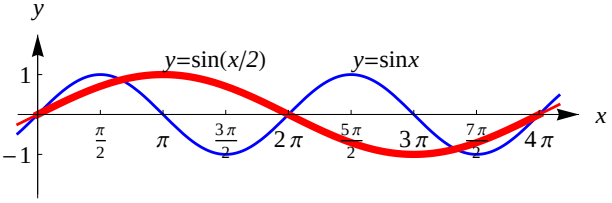
$y = c \cdot f(x)$, $c > 0$

$c = -1$ esetén az $y = -f(x)$ függvénygrafikont az $y = f(x)$ grafikon x-tengelyre való tükrözésével kapjuk.

4^o A periodikus függvényeknél fontos a függvény független változójának konstanssal való szorzása. Ebben az esetben az $y = f(cx)$ transzformációról van szó. Ha ω az $y = f(x)$ függvény periódusa, akkor $\dfrac{\omega}{c}$ az $y = f(cx)$ függvény periódusa, ahol $c > 0$.

A következő ábrákon az $y = \sin x$ grafikonjának $y = \sin(2x)$ és $y = \sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ függvénytranszformációi láthatók. Az $f(x) = \sin x$ függvény alapperiódusa $\omega_0 = 2\pi$, $y = \sin(2x)$ alapperiódusa $\omega_0 = \pi$, $y = \sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ alapperiódusa pedig $\omega_0 = 4\pi$.





FELADATOK.

Függvénytranszformációk segítségével rajzoljuk meg a következő függvények grafikonjait.

1. $f(x) = -2(x-3)^2 + 2$

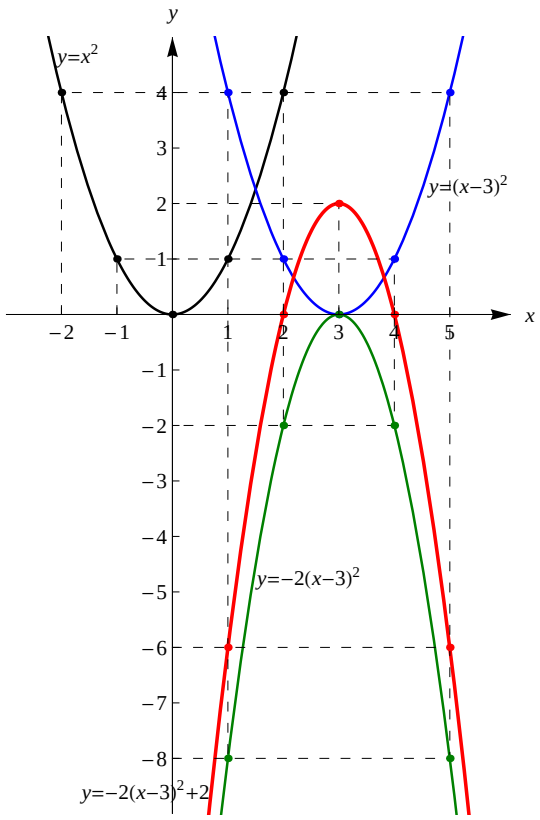
Megoldás. Ha az $y = x^2$ parabolát az x-tengely irányában jobbra toljuk 3 egységgel, akkor az

$$y = (x-3)^2$$

parabolát kapjuk. A megfelelő függvényértékeket -2-vel szorozva kapjuk az

$$y = -2(x-3)^2$$

grafikont. Az így kapott görbét y-tengely irányában 2 egységgel felfelé tolva megkapjuk a keresett másodfokú függvény grafikonját.



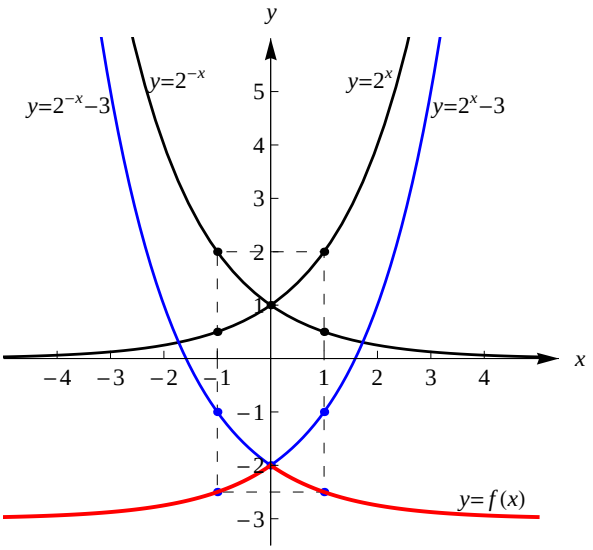
2. $f(x) = 4^{-\frac{\sqrt{x^2}}{2}} - 3$

Megoldás. Mivel

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

és $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$, így az adott függvény felírható a következő alakban:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 3, & \text{ha } x \geq 0, \\ 2^{x} - 3, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



A grafikonját megrajzolhatnánk két értéktáblázat segítségével, vagy függvénytranszformációkkal a következőképpen. Legyenek $y = 2^{-x}$ és $y = 2^x$ a kiinduló görbék. Toljuk el mindkettőt az y-tengely irányában lefelé 3 egységgel. Az $y = 2^{-x} - 3$ görbéből válasszuk ki azt az ívet, amelyre $x \geq 0$, az $y = 2^x - 3$ görbéből pedig azt az ívet, amelyre $x < 0$. A két ív együttesen adja meg az $y = f(x)$ grafikont.

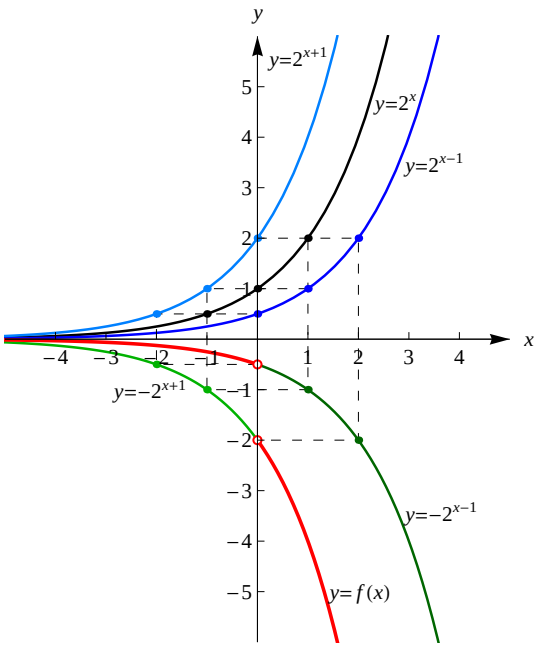
3. $f(x) = -2^{\frac{|x|}{x}+x}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy az adott függvény $x = 0$-ban nem értelmezett. Írjuk fel abszolútérték nélkül az f függvényt. Mivel

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

ezért

$$f(x) = \begin{cases} (-1)\cdot 2^{x+1}, & \text{ha } x > 0, \\ (-1)\cdot 2^{x-1}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

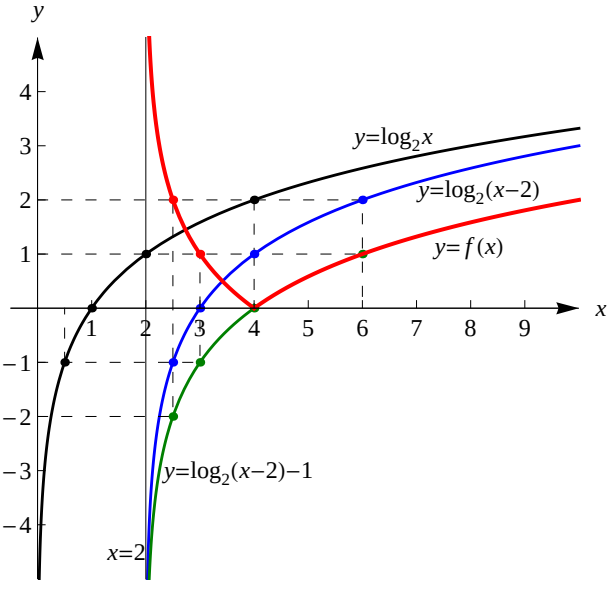


A függvény grafikonjának megrajzolásához induljunk ki az $y = 2^x$ grafikonjából. Egyik esetben ezt a görbét toljuk jobbra az x-tengely mentén 1 egységgel, a másik esetben pedig ugyanezt a görbét toljuk balra szintén 1 egységgel. A kapott görbéket a (-1)-gyel való szorzás miatt tükrözzük az x-tengelyhez viszonyítva. A balra mozdított görbéből válasszuk az $x > 0$-hoz tartozó ívet, a jobbra mozdított görbéből pedig az $x < 0$-hoz tartozó ívet.

4. $f(x) = |\log_2(x-2) - 1|$

Megoldás. A keresett függvény grafikonjához eljutunk, ha az $y = \log_2 x$ görbére függvénytranszformációkat alkalmazunk a következő sorrendben:

Először x-tengely irányában jobbra toljuk a görbét 2 egységgel, majd a kapott görbét y-tengely irányában toljuk lefelé 1 egységgel. Az abszolútérték miatt az így kapott grafikonnak azt a részét, amely az x-tengely alatt van tükrözzük a pozitív félsíkra az x-tengelyhez viszonyítva. Vegyük észre, hogy a függvény értelmezési tartománya $D_f = (2, \infty)$ és az $x = 2$ egyenes a függvény függőleges aszimptotája.

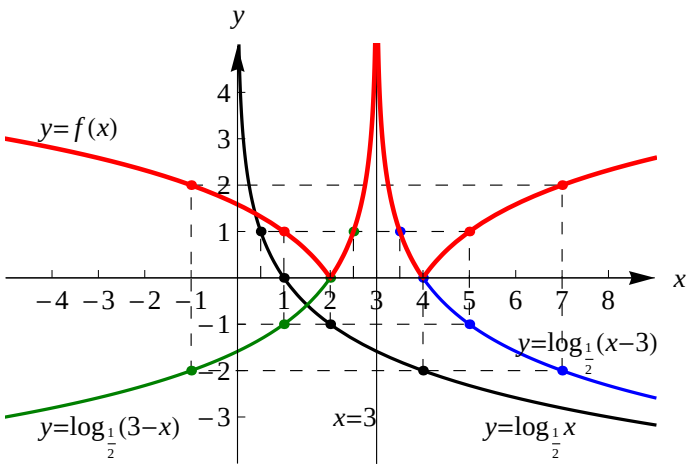


5. $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} |3-x|\right|$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$. Mivel

$$\log_{\frac{1}{2}} |3-x| = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-3), & \text{ha } x > 3, \\ \log_{\frac{1}{2}}(3-x), & \text{ha } x < 3 \end{cases}$$

ezért az $y = \log_{\frac{1}{2}} |3-x|$ függvénygrafikont megkaphatjuk, ha az $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ görbét jobbra toljuk az x-tengely irányában 3 egységgel, majd azt tükrözzük az $x = 3$ egyeneshez viszonyítva (a függvény $(x-3)$ argumentumának (-1)-gyel való szorzása miatt). A külső abszolút érték miatt mindkét görbének azt az ívét, amely a negatív félsíkhoz tartozik, tükrözzük a pozitív félsíkra. Így kapjuk meg az $y = f(x)$ függvénygrafikont.



2. Számsorozatok

2.1. A sorozat fogalma, megadása és ábrázolása

2.1. Definíció. *Azokat az $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ valós függvényeket, melyek minden n természetes számhoz egy a_n valós számot rendelnek hozzá, végtelen számsorozatoknak, röviden sorozatoknak nevezzük. a_n a sorozat n-edik eleme (vagy tagja), amelyet szokás a sorozat általános elemének is nevezni. Magát a sorozatot $\{a_n\}$-nel jelöljük.*

2.1.1. Sorozatok megadása

A sorozatoknak végtelen sok eleme van és ezeket különféle módon adhatjuk meg.
I. A sorozatot megadhatjuk *az általános elem képletével*, vagyis az n változó függvényeként felírt *képlettel*, *formulával*.

2.1. Példa. *a)* Ha $a_n = n$ az általános elem, akkor a sorozat elemei $1, 2, 3, 4, 5, ...$ és ez a természetes számok sorozata.

b) Amennyiben $a_n = 2^n$ az általános elem képlete, akkor a sorozat elemei $2, 4, 8, 16, 32, ...$ és most a 2 hatványainak sorozatát kapjuk.

c) $a_n = \dfrac{1}{n}$ esetén a sorozat elemei $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, ...$ és ez a harmonikus sorozat, mely nevét arról kapta, hogy a második elemtől kezdve a sorozat minden eleme a két szomszédos elem *harmonikus közepe*, vagyis érvényes, hogy

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right), \quad n \geq 2.$$

II. A sorozatot megadhatjuk *rekurzív módon*. Ez azt jelenti, hogy néhány elemet megadunk, a további elemeket pedig az előttük lévők segítségével definiáljuk.

2.2. Példa. *a)* Legyen $a_1 = 1$ és $a_n = 2a_{n-1}$, ha $n \geq 2$. Ekkor

$$a_2 = 2a_1 = 2, \quad a_3 = 2a_2 = 4, \quad a_4 = 2a_3 = 8, \quad a_5 = 2a_3 = 16,$$

és így tovább. A sorozat elemei $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$.

b) Legyen $a_1 = 0$ és $a_n = 2a_{n-1} + 1$, ha $n \geq 2$. Ekkor

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 1, \quad a_3 = 2a_2 + 1 = 3, \quad a_4 = 2a_3 + 1 = 7, \quad a_5 = 2a_4 + 1 = 15,$$

és így tovább. A sorozat elemei $0, 1, 3, 7, 15, \ldots$.

c) Legyen $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ és $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, ha $n \geq 3$. Ekkor

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 1, \quad a_4 = a_3 + 2a_2 = 3, \quad a_5 = a_4 + 2a_3 = 5,$$

és így tovább. A sorozat elemei ebben az esetben $0, 1, 1, 3, 5, \ldots$.

Ilyen módon kiszámítható a sorozat bármelyik eleme, de ahhoz, hogy meghatározzuk a rekurzív módon megadott sorozat 1000. elemét, ki kell számítani mind a 999 előző elemet is. Bizonyos esetekben a rekurzív képletekkel megadott sorozatok általános eleme is meghatározható, de erről az eljárásról a későbbiekben lesz szó.

III. Számsorozatot megadhatunk *utasítással*, *leírással* is.

2.3. Példa. *a)* Legyen $\{a_n\}$ a prímszámok sorozata, azaz $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ és így tovább. Nem létezik sem explicit, sem rekurzív formula, amely megadná az n. prímszámot, de a sorozat ezzel az utasítással mégis egyértelműen meghatározott.

b) Legyen $\{a_n\}$ az a sorozatot, amelynek elemei sorban a $\sqrt{2}$ végtelen tizedestört alakú felírásának egy-, két-, háromszámjegyű, stb. racionális közelítései. A sorozat elemei $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$. Ha az ezredik számjegyet kérdeznénk, tudjuk, hogy az egyértelműen meg van határozva, de megadnása sok munkát igényelne.

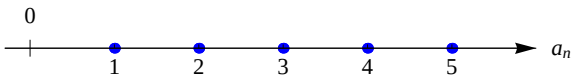
Megjegyzés: A számsorozatokat szokás megadni az első néhány elem felsorolásával is, de ez a definiálás nem mindig egyértelmű, ezért ha lehet kerüljük ezt a megadási módot.

2.4. Példa. Tekintsük az $1, 16, 81, 256, \ldots$ számsorozatot, amelyet az első négy elem segítségével írtunk fel. A felsorolt elemek alapján a sorozat általános eleme egyrészt lehetne $a_n = n^4$, de ugyanakkor $b_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$ is. A megfelelő sorozatok ötödik, hatodik elemei viszont már nem egyeznek meg.

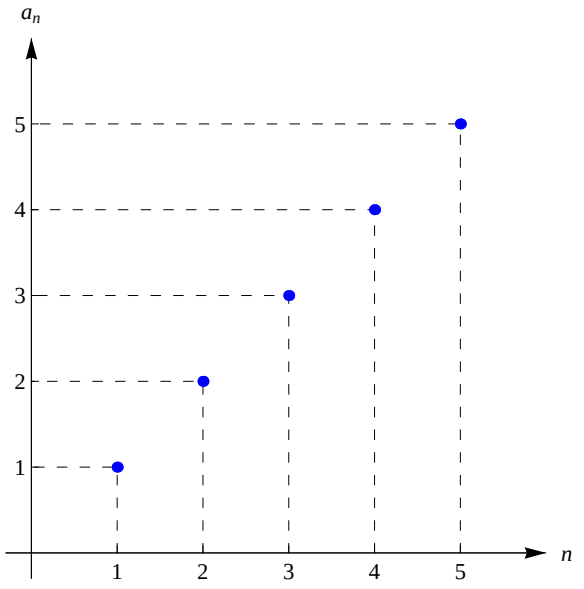
n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	16	81	256	625	1296
b_n	1	16	81	256	601	1176

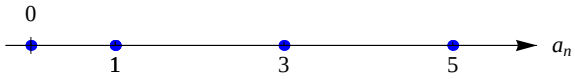
2.1.2. Sorozatok ábrázolása

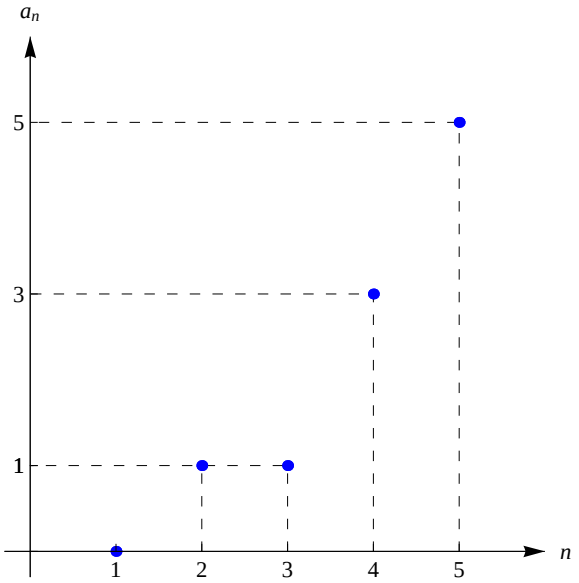
Az $\{a_n\}$ sorozatot ábrázolhatjuk a számegyenesen a sorozat elemeihez rendelt pontokkal: $a_1, a_2, a_3, \ldots$, vagy mint olyan függvényt a valós számsíkban, melynek értelmezési tartományát a természetes számok alkotják, grafikonja pedig az $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, $\ldots$ diszkrét pontok halmaza.



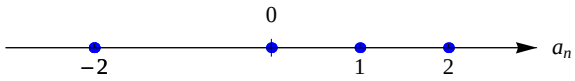
2.5. Példa. Az $a_n = n$ számsorozat számegyenesen való ábrázolása és síkban való ábrázolása is jó képet ad a számsorozatnak megfelelő pontok elhelyezkedéséről.

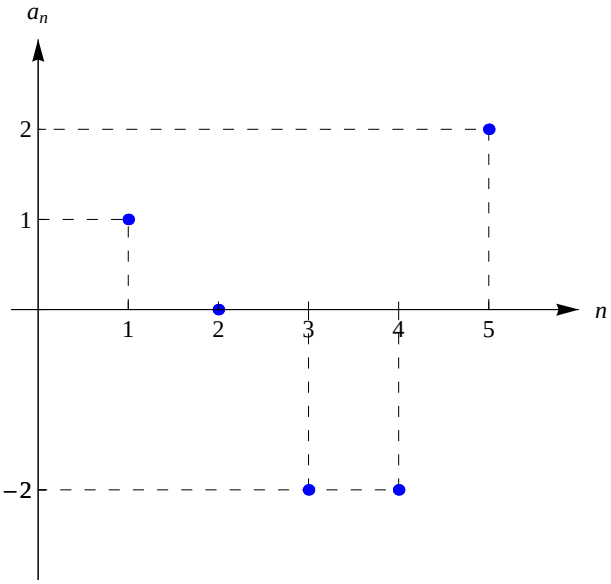






2.6. Példa. Az $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ kezdeti elemekkel és az $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ rekurzív képlettel megadott számsorozat esetében $a_2 = a_3 = 1$, és ez a számegyenesen azt jelenti, hogy az 1-ben két pont van egymás tetején, de ezt nem tudjuk érzékelni. A számsíkon való ábrázolás kiküszöböli ezt a problémát, hiszen ott két különböző pontként jelenik meg $(2, a_2)$ és $(3, a_3)$.





2.7. Példa. Az $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ kezdeti elemekkel és az $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}$ rekurzív formulával megadott számsorozat esetében sem derül ki a számegyenesen, hogy $a_3 = a_4$, hacsak nem írjuk oda minden ponthoz, hogy a számsorozat melyik elemének felel meg. A számegyenesen való ábrázolás azt sem teszi lehetővé, hogy képet kapjunk arról, hogy melyik pont felel meg az első elemnek, melyik a másodiknak, és így tovább. Mint látjuk, a síkban való ábrázolás megoldja ezeket a problémákat.

FELADATOK.

Határozzuk meg az $\{a_n\}$ sorozat első k elemét.

1. $a_n = \dfrac{n-2}{2n}$, $k = 8$

Megoldás.

$$a_1 = \frac{1-2}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2-2}{2\cdot 2} = 0, \quad a_3 = \frac{3-2}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{4-2}{2\cdot 4} = \frac{1}{4},$$

$$a_5 = \frac{5-2}{2\cdot 5} = \frac{3}{10}, \quad a_6 = \frac{6-2}{2\cdot 6} = \frac{1}{3}, \quad a_7 = \frac{7-2}{2\cdot 7} = \frac{5}{14}, \quad a_8 = \frac{8-2}{2\cdot 8} = \frac{3}{8}, \ldots$$

2. $a_n = \dfrac{1-3n}{5n+1}$, $k = 6$

Megoldás.

$$a_1 = \frac{1-3\cdot 1}{5\cdot 1+1} = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1-3\cdot 2}{5\cdot 2+1} = -\frac{5}{11}, \quad a_3 = \frac{1-3\cdot 3}{5\cdot 3+1} = -\frac{1}{2},$$

$$a_4 = \frac{1-3\cdot 4}{5\cdot 4+1} = -\frac{11}{21}, \quad a_5 = \frac{1-3\cdot 5}{5\cdot 5+1} = -\frac{7}{13}, \quad a_6 = \frac{1-3\cdot 6}{5\cdot 6+1} = -\frac{17}{31}, \dots$$

3. $a_n = 2 + (-1)^{n+1}\dfrac{3}{n}$, $k = 6$

Megoldás.

$$a_1 = 2 + (-1)^2 \cdot \frac{3}{1} = 5, \quad a_2 = 2 + (-1)^3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 2 + (-1)^4 \cdot \frac{3}{3} = 3,$$

$$a_4 = 2 + (-1)^5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \quad a_5 = 2 + (-1)^6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{5}, \quad a_6 = 2 + (-1)^7 \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{2}, \dots$$

4. $a_n = 1 + (-1)^{n-1}\dfrac{1-n}{n!}$, $k = 4$

Megoldás.

$$a_1 = 1 + (-1)^0 \cdot \frac{0}{1!} = 1, \quad a_2 = 1 + (-1)^1 \cdot \frac{-1}{2!} = \frac{3}{2},$$

$$a_3 = 1 + (-1)^2 \cdot \frac{-2}{3!} = \frac{2}{3}, \quad a_4 = 1 + (-1)^3 \cdot \frac{-3}{4!} = \frac{9}{8}, \dots$$

5. $a_n = \cos(n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 8$

Megoldás.

$$a_1 = \cos\pi = -1, \quad a_2 = \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \quad a_3 = \cos 2\pi = 1, \quad a_4 = \cos\frac{5\pi}{2} = 0,$$

$$a_5 = \cos 3\pi = -1, \quad a_6 = \cos\frac{7\pi}{2} = 0, \quad a_7 = \cos 4\pi = 1, \quad a_8 = \cos\frac{9\pi}{2} = 0, \dots$$

6. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$, $k = 8$

Megoldás.

$$a_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad a_2 = \sin\pi = 0, \quad a_3 = \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \quad a_4 = \sin 2\pi = 0,$$

$$a_5 = \sin\frac{5\pi}{2} = 1, \quad a_6 = \sin 3\pi = 0, \quad a_7 = \sin\frac{7\pi}{2} = -1, \quad a_8 = \sin 4\pi = 0, \dots$$

7. $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ páratlan;} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ páros.} \end{cases}$, $k = 8$

Megoldás. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$, $a_6 = 3$, $a_7 = 1$, $a_8 = 4$, ...

8. $a_n = \begin{cases} \ln e^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ páratlan;} \\ e^{\ln \frac{n}{2}}, & n \text{ páros.} \end{cases}$, $k = 8$

Megoldás. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 3$, $a_7 = 4$, $a_8 = 4$, ...

9. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $k = 4$

Megoldás.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}, \ldots$$

10. $a_n = \frac{1 + 2 + \cdots + 2n}{n^2} + 1$, $k = 3$

Megoldás. $a_1 = \frac{1+2}{1^2} + 1 = 4$, $a_2 = \frac{1+2+3+4}{2^2} + 1 = \frac{14}{4}$,

$a_3 = \frac{1+2+3+4+5+6}{3^2} + 1 = \frac{10}{3}, \ldots$

11. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = -5 - 4a_n$, $k = 5$

Megoldás. $a_1 = -1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $a_4 = -1$, $a_5 = -1$, ...

12. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 5}{6}$, $k = 5$

Megoldás. $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{7}{2}$, $a_3 = \frac{23}{8}$, $a_4 = \frac{283}{128}$, $a_5 = \frac{54003}{32768}$, ...

13. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^n}{2^n}$, $k = 5$

Megoldás. $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{3}{8}$, $a_5 = \frac{7}{16}$, ...

14. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 5a_n$, $k = 5$

Megoldás. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 11$, $a_4 = 37$, $a_5 = 129$, ...

15. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = (-1)^n \cdot \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$, $k = 5$

Megoldás. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -\frac{3}{2}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{5}{8}$, ...

2.2. Korlátos és monoton sorozatok

Mivel a sorozatok is függvények, ezért természetes, hogy vizsgáljuk a függvényekre jellemző tulajdonságokat. Két ilyen fontos tulajdonság a korlátosság és monotonitás.

2.2. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozatot felülről (alulról) korlátosnak nevezzük, ha megadható olyan K (k) szám, amelynél a sorozatnak nincs nagyobb (kisebb) eleme, azaz*

$$a_n \leq K, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (a_n \geq k, \quad n = 1, 2, \ldots).$$

A sorozatot korlátosnak mondjuk, ha felülről és alulról is korlátos, azaz ha minden n-re

$$k \leq a_n \leq K.$$

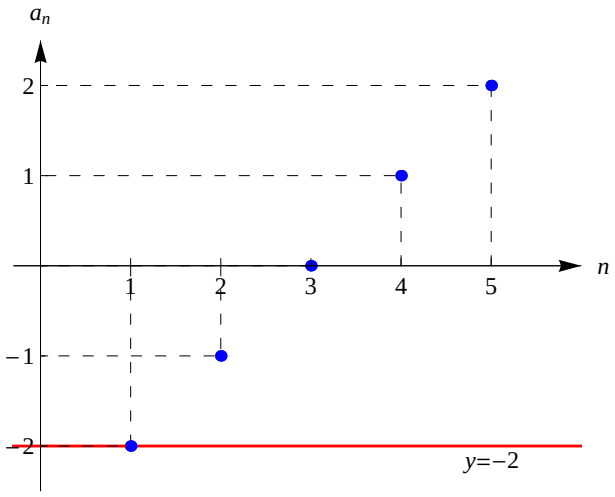
Az ilyen k számot alsó korlátnak, a K számot pedig felső korlátnak nevezzük.

A definícióból következik, hogy ha létezik egy felső (alsó) korlát, akkor végtelen sok felső (alsó) korlát is van. A valós számok teljességi axiómájából következik, hogy a felső korlátok között van legkisebb és az alsó korlátok között van legnagyobb.

2.3. Definíció. *Felülről korlátos sorozat legkisebb felső korlátját a sorozat felső határának vagy szuprémumának; alulról korlátos sorozat legnagyobb alsó korlátját a sorozat alsó határának vagy infimumának nevezzük. Jelölésük:* $\sup\{a_n\}$, *illetve* $\inf\{a_n\}$.

A fentiek szerint felülről (alulról) korlátos sorozatnak van felső (alsó) határa. Korlátos sorozatnak van felső és alsó határa is. A sorozat felső (alsó) határa nem feltétlenül eleme a sorozatnak.

2.8. Példa. Az $a_n = n - 3$ sorozat alulról korlátos, mert $n - 3 \geq -2$, így egy alsó korlátja $k = -2$. Felülről nem korlátos a sorozat, mert bármely K számot is vesszük, van a sorozatnak olyan eleme, mely K-nál nagyobb, ugyanis $a_n > K$, ha $n > K + 3$. A grafikon szempontjából ez azt jelenti, hogy a számsorozat pontjai vagy az $y = -2$ egyenesen vannak vagy pedig az $y = -2$ egyenes felett.



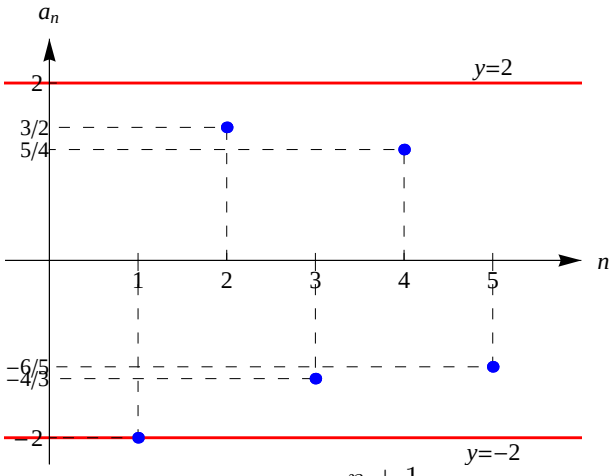
$a_n = n - 3$

2.9. Példa. Az $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$ sorozat korlátos, mert

$$|a_n| = \left|(-1)^n \frac{n+1}{n}\right| =$$

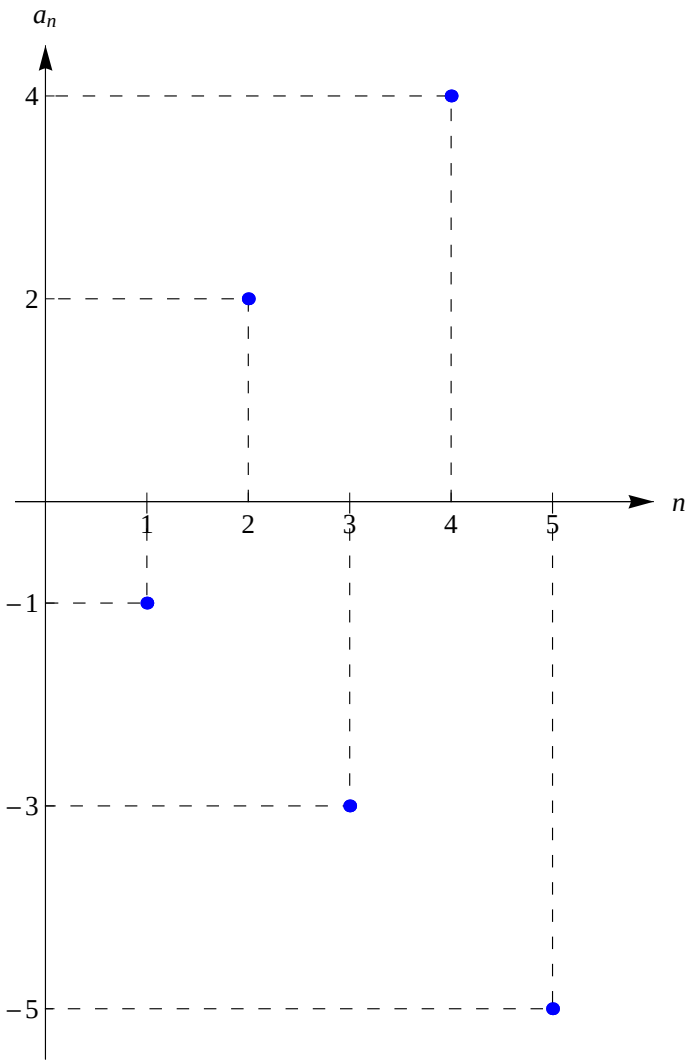
$$= \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2,$$

tehát $-2 \leq a_n \leq 2$ minden n-re, vagyis a sorozat egy alsó korlátja $k = -2$, egy felső korlátja pedig $K = 2$. A számsorozat pontjai az $y = -2$ és az $y = 2$ egyenesek között helyezkednek el, legfeljebb magukon az egyeneseken vannak rajta.



$a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$

2.10. Példa. Az $a_n = (-1)^n n$ sorozat sem alulról, sem felülről nem korlátos, mert $|a_n| > K$, ha $n > K$. Ez egy oszcillálló sorozat, amelynél n növekedésével a megfelelő a_n értékek abszolút értékben mind nagyobbak és nagyobbak, s így a nekik megfelelő pontok mind távolabb és távolabb vannak az x-tengelytől.



$a_n = (-1)^n n$

2.4. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ha*

$$a_n < a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}) \quad \textit{minden} \quad n \in \mathbf{N} \quad \textit{esetén.}$$

Az $\{a_n\}$ sorozat monoton nemcsökkenő (nemnövekvő), ha

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}) \quad \textit{minden} \quad n \in \mathbf{N} \quad \textit{esetén.}$$

Ezen tulajdonságok valamelyikével rendelkező sorozatot *monoton sorozatnak* nevezzük.

2.11. Példa. Az $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ sorozat szigorúan monoton növekvő, mivel

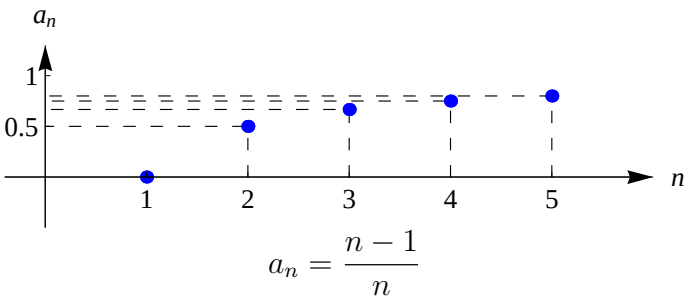
$$a_n - a_{n+1} = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1) - n^2}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2 - 1 - n^2}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

azaz $a_n < a_{n+1}$ minden n természetes szám esetén.

Az $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ sorozat első néhány eleme

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots .$$



$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

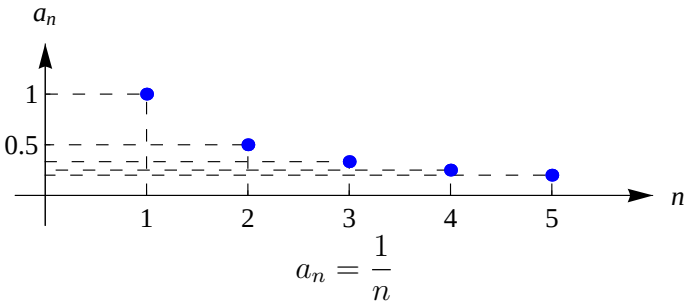
2.12. Példa. Az $a_n = \dfrac{1}{n}$ (pozitív elemű) sorozat szigorúan monoton csökkenő, mivel

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1,$$

azaz $a_n > a_{n+1}$ minden n természetes szám esetén.

Az $a_n = \dfrac{1}{n}$ sorozat első néhány eleme

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots .$$



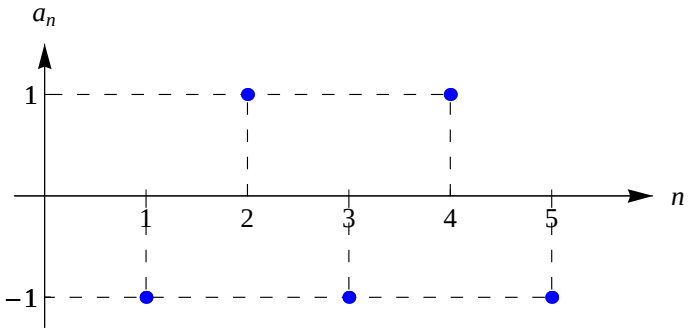
$$a_n = \frac{1}{n}$$

2.13. Példa. Az $a_n = (-1)^n$ sorozat nem monoton sorozat, hiszen az

$$a_n - a_{n+1} = (-1)^n - (-1)^{n+1} = (-1)^n + (-1)^n = 2 \cdot (-1)^n$$

kifejezés nem állandó előjelű. Mivel a sorozat elemei váltakozva negatívak és pozitívak, ezért azt mondjuk rá, hogy oszcilláló, első néhány eleme pedig

$$-1, 1, -1, 1, -1, \dots .$$



$$a_n = (-1)^n$$

Vegyük észre, hogy ha az $a_n = (-1)^n$ számsorozatot számegyenesen ábrázoltuk volna, akkor csak két pont lenne a grafikonon, a -1-nél és az 1-nél. Mindkettő esetében viszont végtelen sok pont lenne egymás tetején, csak az egyenesen ezt nem lehet érzékeltetni.

FELADATOK.

Vizsgáljuk ki a következő sorozatok monotonitását és korlátosságát.

1. $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

Megoldás. Vizsgáljuk ki a sorozat monotonitását. E célból két szomszédos elem különbségének előjelét kell meghatározni.

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0.$$

Mivel $a_{n+1} - a_n < 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért $a_{n+1} < a_n$ érvényes minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, vagyis a sorozat szigorúan monoton csökkenő.
Mivel a sorozat szigorúan monoton csökkenő, ezért az első elem $a_1 = 2$ egyben a sorozat legkisebb felső korlátja is, azaz $K = 2$ esetén $a_n \leq K$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Mivel $\dfrac{1}{n} > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért $a_n = 1 + \dfrac{1}{n} > 1$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért a sorozat egy alsó korlátja lehet $k = 1$. A sorozat tehát korlátos és minden n természetes számra

$$1 < a_n \leq 2.$$

2. $a_n = 2 - n$

Megoldás. A monotonitási tulajdonság meghatározásához vizsgáljuk most ki az $a_{n+1} - a_n$ különbség előjelét. Mivel

$$a_{n+1} - a_n = 2 - (n+1) - (2 - n) = 2 - n - 1 - 2 + n = -1 < 0,$$

ezért $a_{n+1} < a_n$ minden n természetes számra, tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Így a sorozat felülről korlátos, egy felső korlátja $K = a_1 = 1$. Ha k alsó korlátja lenne, akkor erre $k < 2 - n$ kellene, hogy teljesüljön, viszont ez csak $n < 2 - k$ indexekre lenne igaz, nem pedig minden n természetes számra. Most ugyanis minél nagyobb n, annál kisebb $a_n = 2 - n$, tehát a sorozat alulról nem korlátos.

3. $a_n = n^2 + 1$

Megoldás. A monotonitást az $a_{n+1} - a_n$ különbség előjeléből állapítjuk meg. Mivel

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1 = 2n > 0$$

minden n természetes számra, így $a_{n+1} > a_n$ minden n természetes számra, tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő. A sorozat első eleme egyben a sorozat egy alsó korlátja is, tehát $k = a_1 = 2$. Ha létezne olyan K szám, amelyre $n^2 + 1 < K$, akkor ez a tulajdonság csak az $n < \sqrt{K+1}$ indexű elemekre lenne igaz, tehát a sorozat felülről nem korlátos. Valóban, ez egy olyan sorozat, hogy egyre nagyobb n természetes számok esetén $a_n = n^2 + 1$ még gyorsabban nő. A sorozat tehát szigorúan monoton növekvő és alulról korlátos.

4. $a_n = \dfrac{n-2}{2n}$

Megoldás. Vizsgáljuk ki az $a_{n+1} - a_n$ különbséget.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1-2}{2(n+1)} - \frac{n-2}{2n} = \frac{n-1}{2(n+1)} - \frac{n-2}{2n} = \frac{n(n-1)-(n-2)(n+1)}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2 - n - n^2 + 2n - n + 2}{2n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

ezért $a_{n+1} > a_n$ minden n természetes számra, tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő. A sorozat első eleme egyben a sorozat egy alsó korlátja is, tehát $k = a_1$, illetve $k = -\dfrac{1}{2}$. Mivel $\dfrac{1}{n} > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért $-\dfrac{1}{n} < 0$ és $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{2}$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért a sorozat egy felső korlátja lehet $k = \dfrac{1}{2}$, hiszen minden $n \in \mathbf{N}$-re

$$a_n = \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2}.$$

A sorozat tehát korlátos és minden n természetes számra

$$-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}.$$

5. $a_n = \dfrac{n^2+2}{n^2+1}$

Megoldás. Vizsgáljuk most is az $a_{n+1} - a_n$ különbséget.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2+2}{n^2+1} = \frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2} - \frac{n^2+2}{n^2+1} =$$

$$= \frac{(n^2+2n+3)(n^2+1) - (n^2+2)(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} =$$

$$= \frac{n^4 + n^2 + 2n^3 + 2n + 3n^2 + 3 - n^4 - 2n^3 - 2n^2 - 2n^2 - 4n - 4}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} =$$

$$= \frac{-(2n+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0,$$

minden n természetes számra, így $a_{n+1} < a_n$ minden n természetes számra, tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő. A sorozat első eleme egyben a sorozat egy felső korlátja is, tehát $K = a_1 = \dfrac{3}{2}$. Vegyük észre, hogy

$$a_n = \frac{n^2+2}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{n^2+1}.$$

Mivel

$$\frac{1}{n^2+1} > 0, \quad \text{ezért} \quad 1 + \frac{1}{n^2+1} > 1,$$

tehát $k = 1$ a sorozat egy alsó korlátja. A sorozat tehát korlátos és minden n természetes számra

$$1 < a_n \le \frac{3}{2}.$$

2.3. Rekurzív sorozatok

A rekurzív sorozatok közül néhány sorozat gyakorlati alkalmazása, felhasználhatósága miatt annyira jelentős, hogy érdemes velük külön foglalkozni. Ezekből néhányat definiálunk, megmutatjuk jellegzetes tulajdonságaikat és érdekes alkalmazásaikat.

2.3.1. Számtani (aritmetikai) sorozat

2.5. Definíció. *Azt a számsorozatot, amelyben minden elemet (tagot) az őt megelőzőből egy d állandó hozzáadásával kapunk, számtani (vagy aritmetikai) sorozatnak nevezzük. A d szám a sorozat különbsége (vagy differenciája).*

A definíció alapján felírhatjuk a számtani sorozat rekurzív képzési szabályát:

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad \text{illetve} \quad a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Ebből adódik, hogy

a) ha $d > 0$, a számtani sorozat monoton növekvő és alulról korlátos,

b) ha $d < 0$, a számtani sorozat monoton csökkenő és felülről korlátos,

c) $d = 0$ esetén is beszélhetünk számtani sorozatról, amely nemnövekvő, nemcsökkenő és korlátos sorozat. Elemei: a_1, a_1, a_1,...,a_1,... Az ilyen sorozatot *állandó* (vagy *konstans*) *sorozatnak* nevezzük.

A számtani sorozat megadásához elég két adat. Legegyszerűbb meghatározó adatai a_1 és d. Az egyszerű képzési szabályból adódik, hogy a_1 és d ismeretében a számtani sorozat bármelyik elemét felírhatjuk a következőképpen:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_1 + 3d,$$

$$\vdots$$

Ezt az eljárást folytatva és általánosítva kimondható a következő tétel:

2.1. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ számtani sorozat első eleme a_1 és különbsége d, akkor minden n természetes számra érvényes, hogy*

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Bizonyítás. A bizonyítás a matematikai indukció módszerével történik.
1^o $n = 1$ esetén $a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1 + 0 \cdot d = a_1$.
2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, vagyis, hogy $a_k = a_1 + (k-1)d$.
3^o Igazoljuk az állítás helyességét $n = k+1$-re. Ekkor
$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + (k+1-1)d = a_1 + kd$. $\diamond$

2.14. Példa. Ha az $5, 2, -1, -4, -7, \ldots$ számtani sorozat huszadik elemét kell meghatározni, akkor megállapíthatjuk, hogy $a_1 = 5$ és $d = -3$, tehát

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 5 + 19 \cdot (-3) = -52.$$

2.15. Példa. Ha egy olyan számtani sorozat differenciáját kell kiszámítani, melynek első tagja 3 és tizedik tagja 21, akkor az $a_{10} = a_1 + 9d$ összefüggésből azt kapjuk, hogy $21 = 3 + 9d$, ahonnan $d = 2$.

Mivel

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n,$$

ezért érvényes, hogy a számtani sorozatban bármely három szomszédos elem közül a középső a két mellette levő elem számtani közepe. Erről a tulajdonságról kapta e sorozat a "számtani" megnevezést. Hasonlóan érvényes a következő összefüggés is:

$$\frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = a_n, \quad k < n.$$

Az összeg kiszámításának legegyszerűbb alapgondolata ma is az, amelyet Gauss (1777-1855) 9 éves korában alkalmazott, amikor tanítója azt a feladatot adta az osztályának, hogy adják össze 1*-től* 40*-ig az egész számokat. Gauss egy pillanaton belül felírta az összeget: 820. Tanítója kérésére el is magyarázta a gondolatmenetét. Elképzelte egy sorba felírva a* 40 *tagú összeget, majd ugyanezt a* 40 *tagot fordított sorrendben aláírva. Az egymás alá került két szám összege mindenütt* 41*.* 40 *ilyen pár van, ezért* 41*-et* 40*-nel kellene szorozni, de a két sor miatt minden szám kétszer szerepel az összegben, ezért a* 40 *helyett csak* 20*-szal szorozta az összeget. Ez a szorzat adja a pontos összeget, a* 820*-at.*

Ugyanezzel a gondolatmenettel lehet kiszámítani a számtani sorozat első n elemének S_n összegét. Kimondható a következő tétel:

2.2. Tétel. *Ha az* $\{a_n\}$ *számtani sorozat első eleme* a_1 *és különbsége* d*, akkor az első* n *elemének összege*

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Bizonyítás. Győződjünk meg először arról, hogy minden k esetén, amelyre $1 \leq k \leq n$ érvényes, hogy

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Valóban, $a_k = a_1 + (k-1)d$, $a_{n-k+1} = a_1 + (n-k)d$ és $a_n = a_1 + (n-1)d$, tehát

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n.$$

Mivel

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

és ugyanakkor

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1,$$

így összeadva a két egyenletet adódik, hogy

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n).$$

Innen következik az

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

összefüggés, amelybe behelyettesítve az $a_n = a_1 + (n-1)d$ kifejezést adódik, hogy

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

◇

A tétel gyakorlati alkalmazását mutatja az alábbi példa.

2.16. Példa. Egy útszakasz javításához homokbányából teherautóval homokot szállítanak. Az első forduló terhét a kocsi az út elején rakja le, ez a homokbányától 8000 m-es távolságra van. Minden további forduló terhét 25 m-rel távolabbra kell vinnie. A 35. fordulónál mekkora távolságra megy a kocsi, és a 35 forduló megtétele közben hány km utat tesz meg teher alatt?
$a_1 = 8000$, $d = 25$, tehát $n = 35$ esetben $a_{35} = 8000 + (35-1)25 = 8850$, vagyis a 35. fordulónál a kocsi 8850 m távolságra megy. Mivel a 35 forduló alatt teherrel megtett távolságok összege

$$S_{35} = a_1 + a_2 + ... + a_{35} = \frac{35}{2}(a_1 + a_{35}) = \frac{35}{2}(8000 + 8850) = 294875\,\text{m},$$

így megállapíthatjuk, hogy a 35. forduló megtétele után a kocsi teherrel összesen 294,875 km utat tett meg.

FELADATOK.

1. Egy számtani sorozat első és ötödik tagjának összege 26, második és negyedik tagjának szorzata 160. Számítsuk ki első hat tagjának összegét.

Megoldás. A feltételek lapján felírhatjuk, hogy

$$a_1 + a_5 = 26 \quad \text{és} \quad a_2 \cdot a_4 = 160.$$

Mivel a fenti összefüggésekben szereplő tagok a_3-ra szimmetrikusak, fejezzük ki a megadott feltételeket a_3 segítségével. Ekkor az összegre vonatkozó feltételből következik, hogy

$$a_3 - 2d + a_3 + 2d = 26, \quad \text{illetve} \quad a_3 = 13.$$

Ha a feltételben szereplő szorzat tényezőit is felírjuk a_3 segítségével, akkor az

$$(a_3 - d)(a_3 + d) = 160, \quad \text{illetve} \quad 13^2 - d^2 = 160$$

összefüggést kapjuk, ahonnan $d^2 = 9$, azaz $d = 3$ vagy $d = -3$.
Ha $d = 3$, akkor az $a_3 = a_1 + 2d$ összefüggésből $a_1 = 7$ következik, a keresett számtani sorozat pedig

$$7, 10, 13, 16, 19, \ldots$$

Amennyiben $d = -3$, az $a_3 = a_1 + 2d$ összefüggésből $a_1 = 19$-et kapunk, s akkor a keresett számtani sorozat

$$19, 16, 13, 10, 7, \ldots$$

2. Határozzuk meg az összes olyan kétjegyű szám összegét, amelyek 4-gyel osztva maradékul 1-et adnak.

Megoldás. Az első olyan kétjegyű szám, amely 4-gyel osztva maradékul 1-et ad, a 13. Ez lehet tehát egy sorozat első eleme ($a_1 = 13$). A 4-gyel való osztás maradékosztályában az elemek sorban 4-gyel növekszenek, tehát egy olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek különbsége $d = 4$. Az utolsó kétjegyű szám ebben a sorozatban a 97. A kérdés most az, hogy a 97 hanyadik eleme ennek a sorozatnak. Mivel $a_n = a_1 + (n-1)d$, így $97 = 13 + (n-1) \cdot 4$, és ebből $n = 22$. A keresett összeg kiszámítható a számtani sorozat első n elemének S_n összegképletéből, s így

$$S_{22} = \frac{22}{2}(13 + 97) = 11 \cdot 110 = 1210.$$

3. Egy erdőtelepítésnél párhuzamos sorokban összesen 2660 fát ültettek el. Az első sorba 8, minden következő sorba pedig 3-mal több fa került, mint az előzőbe. Hány fa jutott az utolsó sorba?

Megoldás. A különböző sorokba ültetett fák száma olyan számtani sorozatot alkot, amelyben $a_1 = 8$ és $d = 3$. Ha n sorba összesen 2660 fát ültettek, akkor $S_n = 2660$, és egyrészt ki kell számolni mennyi az n, másrészt pedig, hogy mennyi az a_n. Mivel

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d), \quad \text{így} \quad 2660 = \frac{n}{2}(16 + 3(n-1)),$$

ahonnan

$$5320 = 16n + 3n(n-1), \quad \text{illetve} \quad 3n^2 + 13n - 5320 = 0.$$

Ebből $n_1 = 40$ és $n_2 = -\frac{133}{3}$, ahol a negatív tört megoldásnak nincs értelme, mivel ez nem lehet a sorozat tagjának indexe. Ezek szerint 40 sor fát ültettek el és az utolsó sorba $a_{40} = a_1 + 39d = 8 + 3 \cdot 39 = 125$ fa jutott.

4. Határozzuk meg a számtani sorozatban az első 19 tag összegét, ha tudjuk, hogy $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

Megoldás. Mivel a_4 és a_{16}, valamint a_8 és a_{12} az a_{10} elemre nézve szimmetrikusak, ezért írjuk fel a megadott feltételt a_{10} és d segítségével. Ekkor

$$(a_{10} - 6d) + (a_{10} - 2d) + (a_{10} + 2d) + (a_{10} + 6d) = 224,$$

ahonnan $a_{10} = 56$. Az első 19 tag összege felírható a_{10} segítségével, mint

$$S_{19} = \frac{19}{2}(a_1 + a_{19}) = \frac{19}{2}(a_{10} - 9d + a_{10} + 9d) = \frac{19}{2} \cdot 2a_{10} = 19 \cdot 56 = 1064.$$

5. Lehetnek-e az 5 és a $\sqrt{5}$ egy olyan számtani sorozat elemei, amelynek első tagja 2?

Megoldás. Ha van ilyen sorozat, akkor felírható, hogy

$$5 = 2 + (n-1)d \quad \text{és} \quad \sqrt{5} = 2 + (m-1)d,$$

ahol n és m különböző természetes számok. Ekkor

$$5 - 2 = (n-1)d \quad \text{és} \quad \sqrt{5} - 2 = (m-1)d,$$

ezek hányadosa pedig

$$\frac{\sqrt{5}-2}{5-2}=\frac{(m-1)d}{(n-1)d}=\frac{m-1}{n-1}.$$

Innen $\sqrt{5}=3\cdot\dfrac{m-1}{n-1}+2$, ami lehetetlen, mert $\sqrt{5}$ irracionális szám, a $3\cdot\dfrac{m-1}{n-1}+2$ kifejezés pedig racionális, tehát nem lehetnek egyenlők. Megállapíthatjuk tehát, hogy az 5 és a $\sqrt{5}$ számok nem lehetnek egy olyan számtani sorozat tagjai, amelynek első tagja 2.

2.3.2. Mértani (geometriai) sorozat

2.6. Definíció. *Azt a számsorozatot, amelyben minden elemet (tagot) az őt megelőzőből egy $q\neq 0$ számmal való szorzással kapunk, mértani (vagy geometriai) sorozatnak nevezzük. A q szám a sorozat hányadosa (vagy kvociense).*

A definícióból következik a mértani sorozat rekurzív képzési szabálya:

$$a_n=a_{n-1}q,\quad \text{illetve}\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}=q,\quad n\geq 2.$$

Ebből látjuk, hogy $q>0$ esetén a sorozat elemei azonos előjelűek. Ha $q>1$, akkor $a_1>0$ esetén a mértani sorozat szigorúan monoton növekvő, $a_1<0$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő. Ha $0<q<1$ és $a_1>0$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő, $a_1<0$ esetén pedig szigorúan monoton növekvő. $q=1$-re állandó sorozatot kapunk. Ha $q<0$, akkor az elemek előjele váltakozó.
A definícióból következik, hogy adott a_1 és q esetén a mértani sorozat tagjai felírhatók

$$a_2=a_1q,$$

$$a_3=a_1q^2,$$

$$a_4=a_1q^3,$$

$$\vdots$$

alakban, illetve ezt az eljárást folytatva és általánosítva kimondható a következő tétel:

2.3. Tétel. *Ha a mértani sorozat első eleme a_1 és hányadosa q, akkor minden n természetes szám esetén*

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást matematikai indukcióval végezzük.

1^o $n=1$ esetén $a_1=a_1q^(1-1)=a_1q^0=a_1$.
2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n=k$-ra, vagyis, hogy $a_k=a_1q^{k-1}$.
3^o Igazoljuk az állítás helyességét $n=k+1$-re. Ekkor

$$a_{k+1}=a_k\cdot q=a_1\cdot q^{k-1}\cdot q=a_1\cdot q^k=a_1\cdot q^{k+1-1}.$$

$\diamond$

2.17. Példa. Ha az a feladatunk, hogy az $a_n = \dfrac{3}{2^n}$ mértani sorozatban meghatározzuk az első elemet és a hányadost, akkor az első elem az $a_1 = \dfrac{3}{2^1} = \dfrac{3}{2}$. A kvocienst kiszámíthatjuk bármelyik két szomszédos tag hányadosaként, például

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{2^2}}{\frac{3}{2^1}} = \frac{1}{2}.$$

2.18. Példa. Állapítsuk meg, hogy a mértani sorozat hányadik tagja a -81, ha első eleme -1, hányadosa pedig 3. Mivel $a_n = a_1 q^{n-1}$, ezért $-81 = -1 \cdot 3^{n-1}$, ahonnan $n - 1 = 4$, illetve $n = 5$. Ezért a sorozat ötödik eleme -81.

A mértani sorozatban bármely három egymást követő elemre érvényes az

$$a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}$$

összefüggés, amelyből pozitív tagú sorozat esetén felírható az

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$$

képlet is. Ez azt jelenti, hogy a mértani sorozat három szomszédos eleme közül a középső a két mellette levőnek mértani közepe és ebből származik a megnevezésben a "mértani" jelző. Hasonlóan érvényes $k < n$ esetén, hogy

$$a_n^2 = a_{n-k} a_{n+k}.$$

2.4. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ mértani sorozat első eleme a_1 és hányadosa q, akkor az első n elemének összege*

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Ha $q = 1$, akkor $S_n = n a_1$.

Bizonyítás. Ha

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

akkor

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + ... + a_n q = a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}.$$

Ha a második egyenletből kivonjuk az elsőt, akkor

$$S_n q - S_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n+1} - (a_1 + a_2 + ... + a_n) = a_{n+1} - a_1 = a_1 q^n - a_1,$$

vagyis

$$S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1), \quad \text{ahonnan} \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ha $q = 1$, akkor a mértani sorozat minden tagja egyenlő, így $S_n = n \cdot a_1$. $\diamond$

2.19. Példa. Ha az

$$S_n = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

összegben $x \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor S_n egy olyan mértani sorozat első n tagjának összege, amelyben $a_1 = x^{n-1}$ és $q = \dfrac{y}{x}$. Ezért

$$S_n = x^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{x^n - y^n}{x - y},$$

ahonnan

$$(x - y)S_n = x^n - y^n,$$

vagyis ily módon levezettük az ismert összefüggést, mely szerint

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

A mértani sorozat n-edik elemének kiszámítása a kamatos kamatszámításban nagyon fontos. Gondoljunk a következő problémára.

2.20. Példa. Valaki január 1-én 7000 dinárt évi 5%-os kamatláb mellett betesz a bankba. Kamatosan kamatozva 6 év alatt mekkorára növekszik meg az összeg? (A kamatos kamatozás azt jelenti, hogy az évi kamatot évenként automatikusan hozzácsatolják a lekötött pénzösszeghez, és a következő években már ez a megnövekedett összeg kamatozik.)
Általánosan fogalmazva:
A T_0 összeg évi p%-os kamatlábbal kamatozva n év alatt mekkorára növekszik fel?
A p%-os kamattal növelt összeg 1 év alatt az eredeti $1 + \dfrac{p}{100}$-szorosára növekszik. Ezért p%-kal kamatosan kamatozva n év alatt a T_0 összegből lesz

$$T_n = T_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Esetünkben ez

$$T_6 = T_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 7000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 7000 \cdot 1,05^6 = 9380,67 \,\text{din.}$$

FELADATOK.

1. Egy növekvő mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 20, első három tagjának összege pedig 26. Melyik ez a sorozat?

Megoldás. Mivel $a_1 + a_3 = 20$ és $a_1 + a_2 + a_3 = 26$, ebből nyilvánvaló, hogy $a_2 = 6$, ahonnan $a_1 q = 6$, illetve $a_1 = \dfrac{6}{q}$. Mivel

$$a_1 + a_1 q^2 = 20, \quad \text{így} \quad a_1(1 + q^2) = 20,$$

illetve

$$\frac{6}{q}(1 + q^2) = 20.$$

Ebből a $3q^2-10q+3=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $q_1=3$ és $q_2=\frac{1}{3}$. Mivel a keresett sorozat növekvő kell legyen, így a hányados nem lehet $\frac{1}{3}$. Ezért $q=3$ és $a_1=2$. A feladatban megdott feltételekt kielégítő növekvő mértani sorozat tehát:

$$2, 6, 18, 54, \ldots$$

2. Egy mértani sorozat negyedik tagja 24-gyel nagyobb, mint a második tag, második és harmadik tagjának összege pedig 6. Határozzuk meg ezt a sorozatot.

Megoldás. A megadott feltételekből felírhatjuk, hogy

$$a_4 = a_2 + 24 \quad \text{és} \quad a_2 + a_3 = 6,$$

$$a_1q^3 - a_1q = 24 \quad \text{és} \quad a_1q + a_1q^2 = 6,$$

$$\text{illetve} \quad a_1(q^3 - q) = 24 \quad \text{és} \quad a_1(q + q^2) = 6.$$

Osszuk el a két egyenlet megfelelő oldalait:

$$\frac{q^3 - q}{q + q^2} = \frac{24}{6}.$$

Ekkor

$$q(q^2 - 1) = 4q(q + 1), \quad \text{ha} \quad q + q^2 \neq 0,$$

ebből pedig következik, hogy $q-1=4$, ahonnan $q=5$. Most $30 \cdot a_1 = 6$, innen pedig $a_1=\frac{1}{5}$. Ekkor a keresett mértani sorozat

$$\frac{1}{5}, 1, 5, 25, 125, \ldots$$

Nézzük meg ad-e további megoldást a $q+q^2=0$ eset. A mértani sorozat definíciója szerint $q \neq 0$. Ha $q=-1$, akkor a második feltételből $a_1 \cdot 0 = 6$, ami ellentmondást jelent, tehát ezek az értékek nem adnak megoldást.

3. Egy pozitív tagú mértani sorozat első és ötödik tagjának különbsége 15, első és harmadik tagjának összege pedig 20. Határozzuk meg a sorozat első öt tagjának összegét.

Megoldás. Ahhoz, hogy a mértani sorozat minden tagja pozitív legyen, a_1 és q is pozitív kell legyen. A feltételek szerint $a_1 - a_5 = 15$ és $a_1 + a_3 = 20$ igaz, amelyek felírhatók a_1 és q segítségével, mint

$$a_1(1 - q^4) = 15 \quad \text{és} \quad a_1(1 + q^2) = 20.$$

Elosztva a két egyenlet megfelelő oldalait kapjuk, hogy

$$\frac{1 - q^4}{1 + q^2} = \frac{3}{4}.$$

Mivel $1 - q^4 = (1 - q^2)(1 + q^2)$ és $1 + q^2 \neq 0$, ezért a baloldalon egyszerűsíthetünk $1+q^2$-tel, s ebből az

$$1 - q^2 = \frac{3}{4}, \quad \text{illetve} \quad q^2 = \frac{1}{4}$$

egyenletet kapjuk, ahonnan $q = -\frac{1}{2}$ vagy $q = \frac{1}{2}$. Mivel a feltételek szerint a hányados nem lehet negatív, ezért $q = \frac{1}{2}$ az egyetlen megoldás. Ekkor $a_1 = 16$, a keresett mértani sorozat pedig

$$16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

4. Egy háromszög oldalainak mérőszáma egy mértani sorozat három egymást követő eleme. Milyen határok között változhat a sorozat hányadosa?

Megoldás. Legyenek a háromszög oldalai a, b és c. Tegyük fel, hogy a a háromszög legrövidebb, c pedig a leghosszabb oldala. Mivel ezek a számok mértani sorozatot alkotnak, így $b = aq$ és $c = aq^2$, eami szerint $q \geq 1$. A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$a + b > c, \quad \text{ahonnan} \quad a + aq > aq^2.$$

Mivel a a háromszög oldala, ezért pozitív szám, így a fenti egyenlőtlenség osztható a-val. Ekkor

$$q^2 - q - 1 < 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan $q \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Mivel $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ negatív szám, ezért a $q \geq 1$ feltétel miatt a hányados határai 1 és $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, azaz

$$1 \leq q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. A 2 és 4 közé iktassunk 9 számot úgy, hogy a két megadott számmal együtt mértani sorozatot alkossanak.

Megoldás. A 2-vel és a 4-gyel együtt a keresett 9 szám a sorozat 11 elemét adja meg, vagyis $a_1 = 2$ és $a_{11} = 4$. Mivel $a_{11} = a_1 \cdot q^{10}$, így $4 = 2 \cdot q^{10}$, ahonnan $q = \sqrt[10]{2}$ következik, ugyanis ennek a sorozatnak növekvőnek kell lennie, és ez csak $q > 1$ esetén történhet meg. Így a sorozat elemei

$$2,\ 2\sqrt[10]{2},\ 2\sqrt[10]{2^2},\ 2\sqrt[10]{2^3},\ 2\sqrt[10]{2^4},\ 2\sqrt[10]{2^5},\ 2\sqrt[10]{2^6},\ 2\sqrt[10]{2^7},\ 2\sqrt[10]{2^8},\ 2\sqrt[10]{2^9},\ 2\sqrt[10]{2^{10}},$$

illetve némi rendezés után

$$2,\ 2\sqrt[10]{2},\ 2\sqrt[5]{2},\ 2\sqrt[10]{8},\ 2\sqrt[5]{4},\ 2\sqrt[10]{32},\ 2\sqrt[5]{8},\ 2\sqrt[10]{128},\ 2\sqrt[5]{16},\ 2\sqrt[10]{512},\ 4.$$

6. Egy számtani és egy mértani sorozat első eleme 5 és harmadik elemük is egyenlő. A számtani sorozat második eleme 10-zel nagyobb a mértani sorozat második eleménél. Írjuk fel ezeket a sorozatokat.

Megoldás. Jelölje a_1, a_2, a_3 a számtani sorozat, b_1, b_2, b_3 pedig a mértani sorozat első három elemét. Ekkor

$$a_1 = b_1 = 5, \quad a_3 = b_3, \quad \text{és} \quad a_2 = b_2 + 10.$$

Mivel $a_2 = 5 + d$ és $a_3 = 5 + 2d$, valamint $b_2 = 5q$ és $b_3 = 5q^2$, így következik, hogy

$$5 + 2d = 5q^2 \quad \text{és} \quad 5 + d = 5q + 10.$$

A második egyenletből $d = 5q + 5$, majd ezt az elsőbe helyettesítve következik, hogy

$$5 + 10q + 10 = 5q^2, \quad \text{vagyis} \quad q^2 - 2q - 3 = 0,$$

amelynek megoldásai $q_1 = -1$ és $q_2 = 3$. Ha $q_1 = -1$, akkor $d_1 = 0$, a keresett sorozatok pedig az $5, 5, 5, \ldots$ számtani és az $5, -5, 5, \ldots$ mértani sorozat. Ha $q_2 = 3$, akkor $d_2 = 20$, a keresett sorozatok pedig az $5, 25, 45, \ldots$ számtani és az $5, 15, 45, \ldots$ mértani sorozat. Ezért tehát két sorozatpár létezik a feladatban megadott feltételekkel, mégpedig az

$$5, 5, 5, \ldots \quad \text{és} \quad 5, -5, 5, \ldots$$

valamint az

$$5, 25, 45, \ldots \quad \text{és} \quad 5, 15, 45, \ldots$$

sorozatpár.

7. Négy szám egy mértani sorozat négy egymást követő elemét alkotja. Ha a második számhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, a negyedikből 36-ot elveszünk, akkor az így kapott négy szám egy számtani sorozat egymást követő tagjai lesznek. Melyik ez a négy szám?

Megoldás. Legyenek a, b, c és d a négy szám, amelyek mértani sorozatot alkotnak. Ekkor a feltételek szerint a, $b+6$, $c+3$ és $d-36$ számtani sorozatot alkotnak. Ezért érvényes, hogy

$$\begin{aligned} b^2 &= ac \\ c^2 &= bd \\ 2(b+6) &= a + c + 3 \\ 2(c+3) &= b + 6 + d - 36 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $a = 2b - c + 9$, a negyedikből pedig $d = 2c - b + 36$. helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket az első két egyenletbe. Ekkor a

$$\begin{aligned} b^2 &= c(2b - c + 9) \\ c^2 &= b(2c - b + 36) \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Rendezzük a két egyenletet

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - 2bc &= 9c \\ b^2 + c^2 - 2bc &= 36d \end{aligned}$$

alakúra, majd vonjuk ki egymásból a két egyenletet. Ekkor $c = 4d$ adódik, majd ezt behelyettesítve az $a = 2b - c + 9$ és $d = 2c - b + 36$ egyenletekbe adódnak az $a = 9 - 2b$ és $d = 7b + 36$ összefüggések. A $b^2 = ac$ egyenletbe helyettesítve a $b^2 = (9 - 2b) \cdot 4b$ egyenletet kapjuk, ahonnan $b = 0$ vagy $b = 4$. Ha $b = 0$, akkor $c = 0$, $a = 9$ és $d = 36$, amiből a $9, 0, 0, 36$ sorozatot kapnánk, de ez nem mértani sorozat. Ha $b = 4$, akkor $c = 16$, $a = 1$ és $d = 64$, amiből az $1, 4, 16, 64$ mértani sorozatot kapjuk, a megfelelő számtani sorozat pedig az $1, 10, 19, 28$. A keresett négy szám tehát $1, 4, 16, 64$.

8. Három szám, melyek összege 76, mértani sorozatot alkot. Ezt a három számot tekinthetjük egy számtani sorozat első, negyedik és hatodik tagjának is. Melyik ez a három szám?

Megoldás. Legyenek a, b és c a keresett számok. Mivel ezek a számok mértani sorozatot alkotnak, így $b = aq$ és $c = aq^2$. A számok összege $a + b + c = 76$, illetve $a + aq + aq^2 = 76$. A másik feltétel szerint $b = a + 3d$, illetve $c = a + 5d$ és mivel mértani sorozat elemeiről van szó, ezért felírható, hogy $aq = a + 3d$, illetve $aq^2 = a + 5d$. ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor a $2d = aq(q-1)$ feltételt kapjuk. Az $a(q-1) = 3d$ és a $aq(q-1) = 2d$ feltételből adódik továbbá, hogy

$$\frac{a(q-1)}{3} = \frac{aq(q-1)}{2},$$

ahonnan

$$2a(q-1) = 3aq(q-1) \quad \text{azaz} \quad a(q-1)(2-3q) = 0.$$

Innen $a = 0$ vagy $q = 1$ vagy $q = \frac{2}{3}$ a lehetséges megoldások.
$a = 0$ esetén $b = 0$ és $c = 0$ lenne, ezek összege pedig nem 76.
Ha $q = 1$, akkor $a = \frac{76}{3}$, $b = \frac{76}{3}$ és $c = \frac{76}{3}$. Ez a három szám kielégíti a megadott feltételeket.
ha $q = \frac{2}{3}$, akkor $a\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) = 76$, ahonnan $a = 36$, $b = 24$ és $c = 16$ adódik. Mivel ez a három szám is kielégíti a megadott feltételeket (a megfelelő számtani sorozatban $d = -4$), ezért két olyan számhármas létezik, amely eleget tesz a feladatban kitűzött feltételeknek, ezek pedig a

$$\frac{76}{3},\ \frac{76}{3},\ \frac{76}{3} \quad \text{és a} \quad 36,\ 24,\ 16.$$

9. Lakásvásárlásra januárban 50000 euró kölcsönt kaptunk a banktól évi 5%-os kamatos kamatra. Minden év végén 6000 eurót kell törlesztenünk. Hány év múlva fizetjük vissza az adósságunkat?

Megoldás. A kölcsön összege kezdetkor $T_0 = 50000$ euró. Ha erre az összegre az év végén 5%-os kamatot fizetünk és törlesztünk $x = 6000$ eurót, akkor az első év végén az adósságunk

$$T_1 = T_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = T_0 \cdot q - x,$$

ahol $q = 1 + \frac{p}{100}$. A második év végén az adósságunk

$$T_2 = T_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = (T_0 \cdot q - x) \cdot q - x = T_0 \cdot q^2 - x(q+1).$$

A harmadik év végén ez

$$T_3 = T_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = (T_0 \cdot q^2 - x(q+1)) \cdot q - x = T_0 \cdot q^3 - x(q^2+q+1).$$

Folytatva ezt az eljárást azt kapjuk, hogy az n. év végén adósságunk

$$T_n = T_0 \cdot q^n - x(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) = T_0 \cdot q^n - x \cdot 1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ha adósságunkat az n. évben teljesen vissza akarjuk fizetni, akkor $T_n = 0$ kell legyen. Az a kérdés, hogy ez hanyadik évben történik, azaz mennyi az n értéke. Mivel

$$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1.05,$$

így a keresett értéket a

$$0 = 50000 \cdot 1.05^n - 6000 \cdot 1 \cdot \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1}$$

egyenletből számítjuk ki. Innen

$$120000 = 70000 \cdot 1,05^n, \quad \text{illetve} \quad 1.05^n = \frac{12}{7}.$$

Mindkét oldal logaritmálásával azt kapjuk, hogy

$$n \cdot \log 1.05 = \log \frac{12}{7},$$

ahonnan $n \approx 11.04$, ez pedig azt jelenti, hogy az adósságot körülbelül 11 év alatt fizetjük vissza.

10. Számítsuk ki az $S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\cdots9}_{n}$ összeget.

Megoldás. Először vegyük észre, hogy az összeadandók mindegyike a 10 valamelyik hatványától 1-gyel kisebb szám. Ezt az észrevételt felhasználva felírhatjuk, hogy

$$S_n = (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \cdots + (10^n - 1).$$

Innen az

$$S_n = 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n - n,$$

képletet kapjuk, amelyben felhasználva a mértani sorozat első n elemének összegképletét adódik, hogy

$$S_n = 10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n = \frac{10}{9} \cdot (10^n - 1) - n.$$

2.3.3. A Fibonacci-féle sorozat

Leonardo Pisano (1170-1250) olasz kereskedő-matematikust Fibonaccinak (Bonaccio fia) is nevezték. Sokat utazott és utazásai során sokat foglalkozott az arab matematikával. Két könyvet írt, melyekben több saját eredménye is van. Az 1228-ban kiadott könyvében található az azóta híressé vált következő példa.

2.21. Példa. Vizsgáljuk meg, mennyire szaporodik egy pár maszületett nyúl egy év alatt, ha minden nyúlpár minden hónap végén egy párral szaporodik, a nyulak pedig kéthónapos korukban ivarérettek. (Ez azt jelenti, hogy akkor hoznak első ízben utódokat.)
Minden hónap végén csak azok a nyulak szaporodnak, amelyek legalább kéthónaposak, és így az első hónap végén, illetve második hónap kezdetén nincs szaporulat, marad az egy

pár nyúl. A második hónap végén, azaz harmadik hónap kezdetén már van szaporulat, és így két pár a nyulak száma. A harmadik hónap végén, illetve negyedik hónap kezdetén is csak az eredeti egy pár nyúlnak van ivadéka és így három pár nyúl lesz. A következő, a negyedik hónap végén, vagyis ötödik hónap kezdetén már két pár nyúl lesz kéthónapos, ezért a szaporulat két pár stb. Ha a_n jelenti a nyulak számát az n-edik hónap kezdetén és a_1 a nyulak számát a tenyésztés kezdetén, akkor

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, ...$$

Az így kapott

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

sorozatot Fibonacci sorozatnak szokás nevezni, amelynek általános eleme:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n = 1, 2, ...$$

2.4. Differenciaegyenletek

Az előző fejezetekben találkoztunk két érdekes rekurzív sorozattal. Az egyik egy mértani sorozat,

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

amely általános tagjának képlete $a_n = 2^n$, a másik a Fibonacci-sorozat

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{2.1}$$

amely általános tagjának képlete

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

két mértani sorozat különbsége. Most megmutatjuk azt az eljárást, amelyből a Fibonacci-sorozat képletét nyertük.
Tegyük fel, hogy van olyan $\{t^n\}$ $(t \neq 0)$ mértani sorozat, amely a (2.1) rekurziós formulát kielégíti. Ekkor

$$t^{n+1} = t^n + t^{n-1}, \quad n = 1, 2, ...,$$

és így

$$t^2 - t - 1 = 0. \tag{2.2}$$

Ha t a (2.2) egyenletnek a megoldása, akkor $\{t^n\}$ kielégíti a (2.1) rekurziós formulát. Mivel a (2.2) egyenlet két gyöke $t_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ és $t_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, ezért az

$$\left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \quad \text{és} \quad \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \tag{2.3}$$

geometriai sorozat mindegyike megoldása a (2.1) rekurziós formulának.
A fenti két sorozat egyike sem teljesíti azonban az $a_1 = a_2 = 1$ kezdeti feltételeket. Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely C_1 és C_2 állandó mellett a (2.3) sorozatok C_1 és C_2

állandókkal való beszorzásával kapott sorozat is kielégíti a (2.1) rekurziós formulát, és a két sorozat összege, az

$$a_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

is. Most a C_1 és C_2 értékeket, a mértani sorozat kezdőértékeit úgy fogjuk megválasztani, hogy $a_1 = a_2 = 1$ legyen. Ez a következő egyenlőségek teljesülését jelenti:

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \ ,$$

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 \ ,$$

amiből $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ és $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Ezt az eljárást alkalmazni lehet a Fibonacci-sorozatnál általánosabb rekurzív sorozatokra is.

2.4.1. Véges differenciák

2.7. Definíció. *Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat véges differenciáján a*

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad n = 1, 2, ...$$

különbséget értjük.

Az a leképezés, amely az $\{a_n\}$ sorozathoz hozzárendeli a $\{\Delta a_n\}$ sorozatot, a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n,$$

és ha λ valós szám, akkor

$$\Delta(\lambda a_n) = \lambda \cdot \Delta a_n,$$

vagyis a Δ az összeadással és a λ-val való szorzással felcserélhető. Ezt a tulajdonságot úgy fejezzük ki röviden, hogy Δ *lineáris*. A magasabb differenciákat a következőképpen értelmezzük: a második differencia

$$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

2.4.2. Állandó együtthatós lineáris differenciaegyenletek

2.8. Definíció. *Az ismeretlen $\{a_n\}$ számsorozat és első differenciája között fennálló*

$$A_1 \Delta a_n + A_0 a_n = 0, \tag{2.4}$$

alakú lineáris összefüggést, ahol A_1, A_0 együtthatók adott valós számok és $A_1 \neq 0$, állandó együtthatós elsőrendű lineáris differenciaegyenletnek nevezzük.

Behelyettesítve a véges differencia alakját, a (2.4) egyenletet a

$$a_{n+1} = qa_n$$

alakban is felírhatjuk.

2.22. Példa. Tekintsük a

$$\Delta a_n = k$$

alakú differenciaegyenlet, ahol k állandó. A véges differencia definícióját behelyettesítve a fenti egyenlet

$$a_{n+1} - a_n = k$$

alakban írható fel. Az általános megoldás nyilvánvalóan

$$a_n = kn + C.$$

Ez azt jelenti, hogy az a_n értékek olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek differenciája k.

2.23. Példa. Tekintsük most a

$$\Delta a_n + ba_n = 0$$

differenciaegyenletet. A véges differencia definícióját behelyettesítve ez az egyenlet

$$a_{n+1} - a_n + ba_n = 0$$

alakban írható, ahonnan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - b$$

egyenlet adódik. Ebben az esetben tehát az a_n értékek mértani sorozatot alkotnak.

$a_1 = A$ kezdeti érték esetén az

$$a_{n+1} = qa_n$$

elsőrendű lineáris differenciaegyenlet általános megoldása

$$a_n = Aq^{n-1}.$$

A megoldáshoz a következő módszerrel juthatunk: keressük a megoldást $a_n = Ct^n$ alakban, ahol C meghatározatlan állandó, maga a megoldás pedig egy tetszőlegesen választott kezdeti értéktől függ. Behelyettesítés után adódik, hogy

$$t^{n+1} = qt^n,$$

innen pedig a $t - q = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásaként a $t = q$ értéket kapjuk. A kezdeti érték felhasználásával kiszámítható, hogy $C = \frac{A}{q}$, ami a fent megadott megoldáshoz vezet.

2.9. Definíció. *Az ismeretlen $\{a_n\}$ számsorozat és első két differenciája között fennálló*

$$A_2\Delta^2 a_n + A_1\Delta a_n + A_0 a_n = 0 \tag{2.5}$$

alakú lineáris összefüggést, ahol A_2, A_1, A_0 együtthatók adott valós számok és $A_2 \neq 0$, állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciaegyenletnek nevezzük.

Behelyettesítve a véges differenciák megfelelő alakjait, a (2.5) egyenletet az

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \tag{2.6}$$

alakban is felírhatjuk.
Induljunk ki most a (2.6) egyenletből, amely az a_n, a_{n+1} és a_{n+2} ismeretleneket tartalmazza. Ha az a_n és a_{n+1} értékeket tetszőlegesen választjuk, akkor az egyenlet meghatározza az a_{n+2} értéket. Írjuk fel most azt az egyenletet, amelyet úgy kapunk, hogy minden index értékét eggyel megnöveljük. Az ebben az egyenletben előforduló ismeretlenek a következők lesznek: a_{n+1}, a_{n+2} és a_{n+3}. Mivel a_{n+1} és a_{n+2} értéke már ismert, ezért meg tudjuk határozni a_{n+3} értékét. Folytatva ezt az eljárást, belátható, hogy a_n és a_{n+1} tetszőlegesen megválasztott két kezdeti értéke a megoldást teljesen meghatározza. A megoldás tehát két tetszőlegesen választható kezdeti értéktől függ.
Tegyük fel, hogy f_n és g_n az

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \tag{2.7}$$

állandó együtthatós lineáris differenciaegyenlet két lineárisan független megoldása és mindkettő egy speciálisan megválasztott kezdeti értékrendszernek felel meg. Ekkor, az egyenletek lineáris jellege miatt az általános megoldást

$$a_n = C_1 f_n + C_2 g_n$$

alakban írhatjuk fel, ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandó. A fenti összefüggés megadja a (2.7) differenciaegyenlet általános megoldását, ha az f_n és g_n megoldások lineárisan függetlenek. A (2.7) másodrendű lineáris differenciaegyenlet általános megoldásának előállítása végett keressük a megoldást $a_n = t^n$ $(t \neq 0)$ alakban, ahol t egyelőre határozatlan állandó. Behelyettesítve a következő (2.7) differenciaegyenletbe, t ismeretlenes egyenletet kapjuk:

$$t^{n+2} = pt^{n+1} + qt^n, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{2.8}$$

amiből a

$$t^2 = pt + q,$$

másodfokú algebrai egyenlet adódik, a (2.7) karakterisztikus egyenlete, amelynek t a gyöke. Fordítva, ha t a karakterisztikus egyenletnek a megoldása, akkor (2.8) is érvényes, vagyis t^n kielégíti a (2.7) differenciaegyenletet.
Két esetet fogunk tárgyalni: amikor a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van és amikor a karakterisztikus egyenletnek egy kettős valós gyöke van.

I. Vegyük először a két különböző valós gyök esetét, amikor t_1 és t_2 a karakterisztikus egyenlet valós megoldásai, ahol $t_1 \neq t_2$. Ekkor, $f_n = t_1^n$ és $g_n = t_2^n$ a lineárisan független megoldások, s éppúgy, mint a Fibonacci-sorozat esetében, tetszőleges C_1, C_2 mellett az

$$a_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n \tag{2.9}$$

sorozat általános megoldása a differenciaegyenletnek, amiből az $a_1 = A$, $a_2 = B$ kezdeti értéket kielégítő megoldást úgy kapjuk, hogy a

$$C_1 t_1 + C_2 t_2 = A,$$

$$C_1 t_1^2 + C_2 t_2^2 = B$$

egyenletrendszert kielégítő C_1, C_2 értékeket helyettesítjük a (2.9) képletbe.

2.24. Példa. Oldjuk meg az

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2$$

differenciaegyenletet.

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $t^2 - 5t + 6 = 0$, amelynek gyökei $t_1 = 3$ és $t_2 = 2$. Így az egyenlet általános megoldása:

$$a_n = C_1 3^n + C_2 2^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

A C_1, C_2 értékpárra

$$3C_1 + 2C_2 = 3,$$
$$9C_1 + 4C_2 = 2,$$

amiből $C_1 = -\frac{4}{3}$ és $C_2 = \frac{7}{2}$.

II. Kettős valós gyök esetén, amikor $t_1 = t_2$ valós szám, $f_n = t_1^n$ és $g_n = nt_1^n$ a lineárisan független megoldások, s tetszőleges C_1, C_2 mellett az

$$a_n = C_1 t_1^n + C_2 n t_1^n \tag{2.10}$$

sorozat általános megoldása a differenciaegyenletnek, amiből az $a_1 = A$, $a_2 = B$ kezdeti értéket kielégítő megoldást úgy kapjuk, hogy a

$$C_1 t_1 + C_2 t_1 = A,$$

$$C_1 t_1^2 + 2C_2 t_1^2 = B$$

egyenletrendszert kielégítő C_1, C_2 értékeket helyettesítjük a (2.10) képletbe.

2.25. Példa. Határozzuk meg az

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

rekurzív módon megadott számsorozat általános elemét.

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $t^2 - 4t + 4 = 0$, amelynek gyökei $t_1 = t_2 = 2$. Így az egyenlet általános megoldása:

$$a_n = C_1 2^n + C_2 2^n n, \quad n = 1, 2, \dots$$

A C_1, C_2 értékpárra

$$2C_1 + 2C_2 = 0,$$
$$4C_1 + 8C_2 = 1,$$

amiből $C_1 = -\frac{1}{4}$ és $C_2 = \frac{1}{4}$. Ennek alapján az általános elem

$$a_n = -\frac{1}{4} \cdot 2^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n n = (n-1)2^{n-2}.$$

FELADATOK.

1. Oldjuk meg az $a_{n+1} - 3a_n = 0$ differenciaegyenletet, ha $a_1 = \sqrt{2}$.

Megoldás. Keressük a megoldást $a_n = t^n$ alakban, ahol $t \neq 0$. Ekkor az egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$t^{n+1} - 3t^n = 0, \quad \text{illetve a} \quad t - 3 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek megoldása $t = 3$. Ekkor az általános megoldás $a_n = C \cdot 3^n$ alakban írható fel, ahol C tetszőleges valós szám. Mivel $a_1 = \sqrt{2}$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk, hogy $3C = \sqrt{2}$, ahonnan $C = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, a kért feltételeknek eleget tevő megoldás pedig $a_n = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot 3^n$, azaz $a_n = \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}$.

2. Írjuk fel az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{10} a_n$ rekurzív módon megadott számsorozat általános elemét.

Megoldás. A megoldást $a_n = t^n$ alakban keressük, ahol $t \neq 0$. Ekkor az egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$t^{n+1} = -\frac{1}{10} t^n, \quad \text{ahonnan} \quad t = -\frac{1}{10}$$

a karakterisztikus egyenletet megoldása. Ekkor a rekurzív egyenletet kielégíti az $a_n = C \cdot \left(-\dfrac{1}{10}\right)^n$ általános megoldás, ahol C tetszőleges valós szám. Mivel $a_1 = 2$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk, hogy $\dfrac{-C}{10} = 2$, ahonnan $C = -20$ következik, a sorozat n. elemének képlete pedig $a_n = -20 \cdot \dfrac{(-1)^n}{10^n}$, azaz $a_n = -2 \cdot \dfrac{(-1)^n}{10^{n-1}}$.

3. Oldjuk meg az $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ differenciaegyenletet, ha $a_1 = 3$, $a_2 = 3$.

Megoldás. A megoldást most is $a_n = t^n$ alakban keressük, ahol $t \neq 0$. Ekkor az egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$t^{n+2} = 5t^{n+1} - 6t^n, \quad \text{ahonnan} \quad t^2 - 5t + 6 = 0$$

a karakterisztikus egyenletet, megoldásai pedig $t_1 = 2$ és $t_2 = 3$. Ekkor a differenciaegyenletet kielégíti minden

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$$

alakú megoldás, amelyet általános megoldásnak nevezünk, ahol C_1 és C_2 tetszőleges egymástól független valós számok. Mivel $a_1 = 3$ és $a_2 = 3$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk az

$$3 = 2C_1 + 3C_2 \quad \text{és} \quad 3 = 4C_1 + 9C_2,$$

egyenletrendszert, ahonnan $C_1 = 3$ és $C_2 = -1$, a feladat feltételeit kielégítő megoldás pedig

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 3^n.$$

4. Írjuk fel az $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$ rekurzív módon megadott számsorozat általános elemét.

Megoldás. Keressük az általános elemet $a_n = t^n$ alakban, ahol $t \neq 0$. Ekkor az egyenletbe helyettesítve adódik, hogy

$$t^{n+2} = 3t^{n+1} + 4t^n, \quad \text{ahonnan} \quad t^2 - 3t - 4 = 0$$

a karakterisztikus egyenletet, melynek megoldásai $t_1 = -1$ és $t_2 = 4$. Ekkor a rekurzív egyenletet kielégíti minden olyan

$$a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 4^n$$

alakú megoldás, ahol C_1 és C_2 tetszőleges egymástól független valós számok. Mivel $a_1 = 2$ és $a_2 = -2$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk az

$$2 = -C_1 + 4C_2 \quad \text{és} \quad -2 = C_1 + 16C_2,$$

egyenletrendszert, ahonnan $C_1 = 2$ és $C_2 = 0$, a sorozat általános elemének képlete pedig

$$a_n = -2 \cdot (-1)^n, \quad \text{vagyis} \quad a_n = 2(-1)^{n+1}.$$

5. Oldjuk meg az $a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n$ differenciaegyenletet, ha $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

Megoldás. A megoldást $a_n = t^n$ alakban keressük, ahol $t \neq 0$. Az egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$t^{n+2} = -2t^{n+1} - t^n, \quad \text{ahonnan} \quad t^2 + 2t + 1 = 0$$

a karakterisztikus egyenletet, melynek megoldásai $t_1 = t_2 = -1$. Ekkor a differenciaegyenletet kielégíti minden

$$a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot n(-1)^n$$

alakú megoldás, amelyet általános megoldásnak nevezünk, ahol C_1 és C_2 tetszőleges egymástól független valós számok. Mivel $a_1 = 0$ és $a_2 = 1$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk az

$$0 = -C_1 - C_2 \quad \text{és} \quad 1 = C_1 + 2C_2,$$

egyenletrendszert, ahonnan $C_1 = 1$ és $C_2 = -1$, a feladat feltételeit kielégítő megoldás pedig

$$a_n = (-1)^n - n(-1)^n, \quad \text{vagyis} \quad a_n = (1 - n)(-1)^n.$$

2.5. Konvergens sorozatok

2.5.1. Sorozatok határértéke

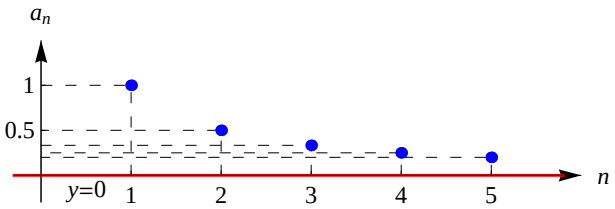
Tekintsük az

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{n-1}{n}, \quad c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad d_n = (-1)^n$$

sorozatokat. Írjuk fel e sorozatok első néhány elemét és rajzoljuk fel grafikonjaikat a számsíkban.

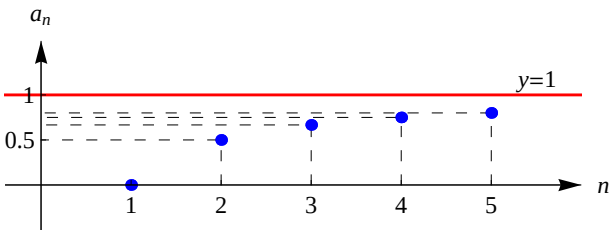
$a_n = \frac{1}{n}$ esetén

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3},$$
$$a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{1}{5}, \dots$$



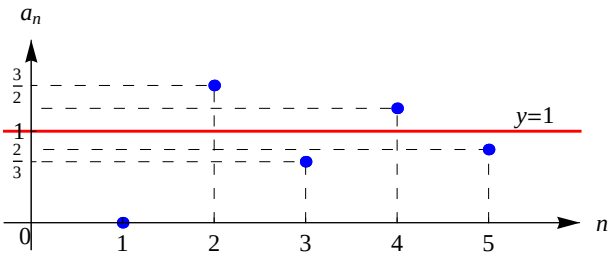
$b_n = \frac{n-1}{n}$ esetén

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{2}{3},$$
$$b_4 = \frac{3}{4}, \quad b_5 = \frac{4}{5}, \dots$$



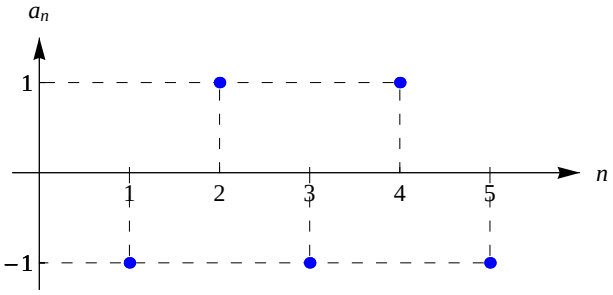
$c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ esetén

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad c_3 = 1 - \frac{1}{3},$$
$$c_4 = 1 + \frac{1}{4}, \quad c_5 = 1 - \frac{1}{5}, \dots$$



$d_n = (-1)^n$ esetén

$$d_1 = -1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = -1,$$
$$d_4 = 1, \quad d_5 = -1, \dots$$

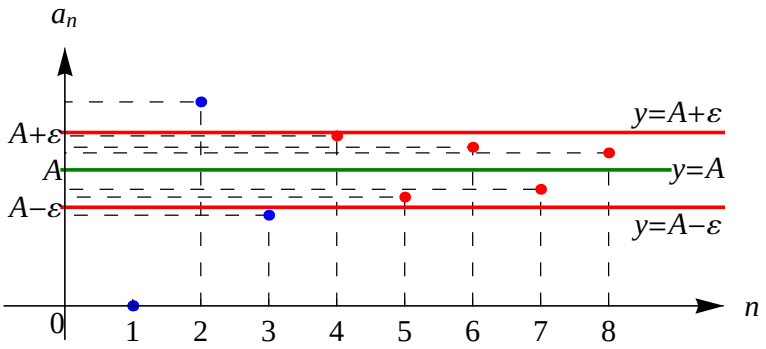


E sorozatokat vizsgálva észrevehető, hogy az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sorozatok esetében rendre van egy-egy olyan szám, amelyet a sorozat elemei tetszőlegesen megközelítenek valamilyen módon. Az $\{a_n\}$ sorozat elemei a 0-t, a $\{b_n\}$ és a $\{c_n\}$ sorozat elemei az 1-et. A $\{d_n\}$ sorozat esetében nincs ilyen szám.

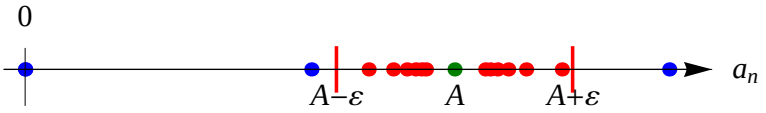
A sorozatok e tulajdonságának pontos meghatározása adja a *konvergencia*, illetve a *határérték* fogalmát. A következőkben két egymással ekvivalens definíciót adunk meg.

2.10. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan A szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbszám (vagy küszöbindex) (N függ ε-tól), hogy ha $n \geq N$, akkor a sorozat elemeinek A számtól való eltérése kisebb mint ε, azaz*

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$



2.11. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan A szám, hogy A bármely környezetébe a sorozatnak véges sok elem kivételével minden eleme beletartozik.*



Az A számot az $\{a_n\}$ sorozat *határértékének* vagy *limeszének* nevezzük jelölése pedig

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{illetve} \quad a_n \to A$$

(olvasd: limesz a_n egyenlő A, illetve a_n tart A-hoz, vagy a_n konvergál A-hoz).

2.26. Példa. Vannak olyan sorozatok, amelyeknek nincs határértéke, mint például a

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \quad b_n = n, \quad c_n = (-1)^n, \quad d_n = (-1)^n n.$$

2.12. Definíció. *Az olyan sorozatokat, amelyeknek nincs határértékük, divergens sorozatoknak nevezzük.*

A következő tétel a határérték *egyértelműségét* (vagy *unicitását*) mondja ki.

2.5. Tétel. *Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.*

Bizonyítás. A tételt indirekt módon bizonyítjuk, azaz feltesszük, hogy legalább két határértéke van a sorozatnak, például A_1 és A_2 ($A_1 \neq A_2$). Mivel $A_1 \neq A_2$, ezért

$$|A_1 - A_2| = \rho > 0.$$

Tekintsük az A_1 és A_2 $\frac{\rho}{4}$ sugarú környezetét. Ezeknek a környezeteknek - a sugár alkalmas választása miatt - nincs közös része. A határérték 2.11. Definíciója alapján, ha A_1 határértéke a sorozatnak, akkor bármely, így $\frac{\rho}{4}$ sugarú környezetébe is, a sorozatnak végtelen sok

eleme esik, és ebből csak véges sok marad ki. Ez azt jelenti, hogy A_2 $\frac{\rho}{4}$ sugarú környezetébe csak véges sok eleme eshet a sorozatnak, tehát A_2-nek van olyan környezete, amelyből végtelen sok eleme marad ki a sorozatnak, így A_2 nem lehet a sorozat határértéke. Ezzel ellentmondásba kerültünk a feltételezésünkkel, hogy A_2 is határértéke a sorozatnak. $\diamond$

Az alábbi tételek a konvergens sorozatoknak két fontos tulajdonságát mondják ki.

2.6. Tétel. *Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Bizonyítás. Ha $a_n \to A$, akkor $\varepsilon = 1$-hez is van olyan $N_1 \in \mathbf{Z}^+$, hogy $n \geq N_1$-re

$$|a_n - A| < 1, \quad \text{azaz} \quad A - 1 < a_n < A + 1.$$

Ha vesszük az $A+1$ számot és a sorozat nála nagyobb elemeit (ilyen csak véges sok lehet, legfeljebb N_1), és ezek közül kiválasztjuk a legnagyobbikat, akkor ez nyilvánvalóan felső korlátja lesz a sorozatnak. Hasonlóan adhatunk egy alsó korlátot is a sorozathoz. Vagyis, ha

$$K = \max\{A + 1, a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}\}, \quad k = \min\{A - 1, a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}\},$$

akkor minden n-re

$$k \leq a_n \leq K$$

teljesül, azaz a sorozat valóban korlátos. $\diamond$

Az állítás nem fordítható meg, azaz a korlátosságból nem következik a konvergencia.

2.27. Példa. *a)* Az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat konvergens, tehát korlátos is.

b) A $b_n = n$ sorozat nem korlátos, tehát nem is konvergens.

c) A $c_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

Ha egy sorozatból végtelen sok elemet választunk ki abban a sorrendben, ahogy ezek az eredeti sorozatban szerepeltek, a sorozatunk egy *részsorozatát* kapjuk.

2.28. Példa. Tekintsük az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozatot. Válasszuk ki ennek összes páratlan indexű elemét, ezzel egy új $b_n = \frac{1}{2n-1}$ sorozat áll elő: $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$.

2.7. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, és határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.*

A sorozatok egy másik, a határértékhez közelálló, de azzal nem azonos jellemzője a *torlódási pont*. Az alábbiakban ezzel ismerkedünk meg.

2.13. Definíció. *Az a számot az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontjának nevezzük, ha a bármely környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.*

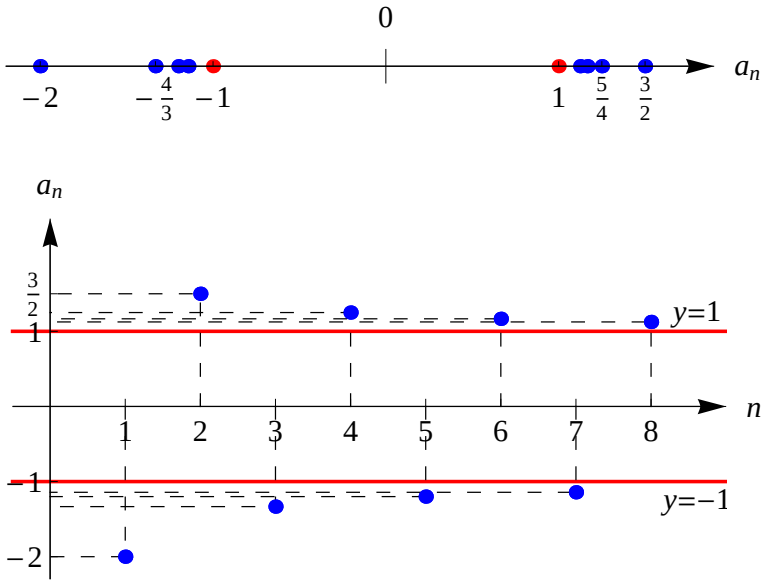
A torlódási pont fogalmát másképpen is lehet definiálni, s a két definíció természetesen egymással ekvivalens.

2.14. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozatnak az a szám torlódási pontja, ha kiválasztható az $\{a_n\}$ sorozatból egy a-hoz konvergáló $\{b_n\}$ részsorozat.*

Nyilvánvaló, hogy a határérték mindig torlódási pont, de ez az állítás fordítva általában nem igaz.

2.29. Példa. Vizsgáljuk meg az $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$ sorozat elemeit, felrajzolva azokat a számsíkban és a számegyenesen. Ez a sorozat nem konvergens, mert két torlódási pontja van, -1 és 1. Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens részsorozatai $b_n = -\dfrac{n+1}{n}$ és $c_n = \dfrac{n+1}{n}$, ahol

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -1 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$



Tudjuk, hogy egy sorozat korlátosságából nem következik a sorozat konvergenciája, igaz viszont a következő tétel.

2.8. Tétel. *(Bolzano-Weierstrass). Korlátos sorozatnak van legalább egy torlódási pontja.*

Megjegyezzük, hogy a Bolzano-Weierstrass tétel egy más megfogalmazása a következő: *Korlátos sorozatból kiválasztható legalább egy konvergens részsorozat.*

2.30. Példa. Az $a_n = (-1)^n$ sorozatból a páros indexű elemeket kiválasztva, 1-hez konvergáló részsorozatot kapunk.

A Bolzano-Weierstrass tétel következménye az alábbi állítás.

2.9. Tétel. *Ha egy korlátos sorozatnak csak egy torlódási pontja van, akkor a sorozat konvergens.*

2.31. Példa. *a)* Az $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ sorozat korlátos és csak egy torlódási pontja van, tehát konvergens.

b) A jól ismert $b_n = (-1)^n$ sorozat ugyan korlátos, de két torlódási pontja van, -1 és 1, ezért nem konvergens.

c) A $c_n = n + (-1)^n n$ sorozatnak csak egy torlódási pontja van, a 0, de nem korlátos, ezért nem konvergens.

Az előzőekben beláttuk, hogy egy konvergens sorozat mindig korlátos, de az állítás megfordítása nem igaz. Ha azonban a korlátos sorozat egyben monoton is, akkor már bizonyosan konvergens.

2.10. Tétel. *Ha egy sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens. Ha a sorozat növekvő, akkor a felső határhoz, ha csökkenő, akkor az alsó határhoz konvergál.*

Bizonyítás. Legyen például az $\{a_n\}$ korlátos sorozat növekvő. Ekkor $a_n \leq a_{n+1}$ minden n-re teljesül. A sorozat korlátos, így van felső határa, jelöljük ezt H-val. Ekkor, egyrészt $a_n \leq H$ minden n-re, másrészt tetszőleges pozitív ε számhoz megadható a sorozatnak olyan a_{n^*} eleme, amely $H - \varepsilon$-nál nagyobb, amelyre tehát

$$H - \varepsilon < a_{n^*} < H.$$

Mivel a sorozat növekvő, a fenti egyenlőtlenség a sorozat minden, az a_{n^*}-ot követő elemére igaz. Így a H bármely környezetéből a sorozatnak legfeljebb véges számú eleme marad ki, hiszen

$$H - \varepsilon < a_{n^*} \leq a_n < H$$

teljesül minden n^*-nál nagyobb n-re. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, és határértéke H. Csökkenő sorozatra - a sorozat alsó határának létezését kihasználva - a bizonyítás hasonlóan végezhető el. $\diamond$

2.32. Példa. *a)* Az $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ sorozat monoton csökkenő és korlátos, ezért konvergens.

b) A $b_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ sorozat monoton növekvő és korlátos, ezért konvergens.

2.5.2. Nullához és végtelenhez tartó sorozatok

A technikai és a gyakorlati alkalmazás szempontjából rendkívül fontosak azok a sorozatok, amelyek "minden határon túl növekednek, illetve csökkennek". Most megadjuk ezen heurisztikus fogalmak pontos definícióját.

2.15. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat plusz végtelenhez tart, ha minden K valós számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbszám, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > K$. Ezt a tényt a következő módon jelöljük:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \textit{vagy} \quad a_n \to +\infty.$$

2.16. Definíció. *Ha az $\{a_n\}$ sorozat olyan, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat minusz végtelenhez tart, és ezt a tényt a következő módon jelöljük:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \textit{vagy} \quad a_n \to -\infty.$$

Amennyiben az $\{a_n\}$ sorozat valamelyik végtelenhez divergál, szokás azt mondani, hogy *tágabb értelemben konvergens* vagy *valódi divergens* sorozat. Ilyen szóhasználat esetén a $+\infty$ és a $-\infty$ is tekinthető valamely sorozat határértékének, bár egyik sem szám.

2.33. Példa. *a)* A természetes számok $1, 2, 3, ..., n, ...$ sorozata $+\infty$-be divergál.

b) A negatív egész számok $\{-n\}$ sorozata $-\infty$-be divergál, $-n \to -\infty$.

c) A $2, 4, 8, ..., 2^n, ...$ sorozat $+\infty$-be divergál, $2^n \to \infty$.

d) A $-2, -8, -32, ..., -2^{2n-1}, ...$ sorozat $-\infty$-be divergál, $-2^{2n-1} \to -\infty$.

Az $a_n = 2^n$ sorozat a $b_n = n$ sorozatnak, a $c_n = -2^{2n-1}$ sorozat a $d_n = -n$ sorozatnak részsorozata, így a fenti példák azt mutatják, hogy a valódi divergens sorozatok bizonyos tekintetben hasonlóan viselkednek, mint a konvergens sorozatok. Érvényes a következő állítás:

2.11. Tétel. *Ha $\{a_n\}$ valódi divergens sorozat, akkor minden részsorozata is az.*

2.34. Példa. Az $a_n = \dfrac{1}{n}$ sorozat 0-hoz konvergál. A $b_n = n$ sorozat végtelenbe divergál.

Általánosan igaz a következő tétel.

2.12. Tétel. *Ha $a_n \to 0$ $(a_n > 0)$, akkor $\dfrac{1}{a_n} \to \infty$. Ha $a_n \to \infty$, akkor $\dfrac{1}{a_n} \to 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a_n \to 0$, és legyen K tetszőleges adott szám. Azt kell megmutatnunk, hogy elég nagy n-re $\dfrac{1}{a_n} > K$.
Feltehetjük, hogy $K > 0$, mert ha a sorozat tagjai valahonnan kezdve pozitív K-nál nagyobbak, akkor ez negatív K-ra még inkább igaz. Legyen tehát $K > 0$. Ekkor $\dfrac{1}{K}$ is pozitív, és $\dfrac{1}{a_n} > K$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_n < \dfrac{1}{K}$ teljesül, ez utóbbi viszont az $a_n \to 0$ feltétel miatt elég nagy n-ekre igaz.
A tétel második részének bizonyításához induljunk ki abból, hogy $a_n \to \infty$, és legyen ε tetszőlegesen megadott pozitív szám. Ekkor

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

teljesül, ha $a_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, ez pedig az $a_n \to \infty$ feltétel miatt elég nagy n-ekre teljesül, tehát $\dfrac{1}{a_n} \to 0$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\diamond$

2.13. Tétel. *Ha $a_n \to \infty$ és $c > 0$, akkor $ca_n \to \infty$, míg ha $c < 0$, akkor $ca_n \to -\infty$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $c > 0$, és K tetszőleges szám. Ekkor $ca_n > K$ minden olyan n-re fennáll, amelyre $a_n > \dfrac{K}{c}$, ez pedig elég nagy n-ekre az $a_n \to \infty$ feltevés miatt igaz. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $ca_n \to \infty$.

Legyen most $c < 0$, és k tetszőleges adott szám. Ekkor a $ca_n < k$ minden olyan n-re teljesül, amelyre $a_n > \dfrac{k}{c}$, ami $a_n \to \infty$ miatt elég nagy n-ekre igaz. Ezzel a tétel bizonyítást nyert. $\diamond$

A végtelenhez tartó sorozatok esetében nem fogalmazhatunk meg a határértékre vonatkozó olyan tételeket, amilyeneket az előzőekben kimondtunk a végeshez konvergáló sorozatok esetében. Így nem mondhatunk semmi biztosat a $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határértékekről. Hasonlóan kritikusak a 1^∞, ∞^0, 0^0 és $\dfrac{0}{0}$ típusú határértékek is.

2.5.3. Műveletek konvergens sorozatokkal

A következő fejezetben látni fogjuk, hogy még viszonylag egyszerű sorozat konvergenciájának bizonyítása sem triviális. Ezért is van jelentősége a konvergens sorozatok és az alapműveletek kapcsolatának, ugyanis néhány egyszerű sorozat határértékének ismeretében bonyolultabb sorozatok határértéke is meghatározható. Most néhány olyan szabályt mutatunk meg, amelyek a sorozatok határértékének gyors kiszámítását teszik lehetővé.

2.14. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek, akkor az $\{a_n + b_n\}$ és az $\{a_n - b_n\}$ sorozatok is konvergensek, mégpedig úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2.15. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek, akkor az $\{a_n \cdot b_n\}$ sorozat is konvergens, mégpedig úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2.16. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek, valamint $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, akkor az $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ sorozat is konvergens, mégpedig úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

2.17. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, akkor érvényesek az alábbi egyenlőségek:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(C \cdot a_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \quad C = konstans,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k, \quad k \in \mathbf{N}.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}, \quad k \in \mathbf{N}.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a a_n = \log_a\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right), \quad a > 0,\ a \neq 1.$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}.$

A c) esetben páros k esetén még azt is meg kell követelni, hogy az $\{a_n\}$ sorozat elemei legyenek nemnegatívak, a d) esetben pedig hogy pozitívak legyenek.

2.18. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek, és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n,$$

akkor véges sok n kivételével $a_n \leq b_n$. Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek és $a_n \leq b_n$ véges sok n kivételével, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2.19. Tétel. *(Rendőr-elv.) Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ teljesül véges sok n kivételével, és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A,$$

akkor $\{b_n\}$ konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

A fenti tétel Kürschák professzor találó elnevezése nyomán a "*Rendőr-elv*" nevet kapta, amelyet az alábbi érdekes módon tudunk átfogalmazni: Két rendőr két oldalról belekarol egy, az utcán elfogott tolvajba. Ha a két rendőr a rendőrségre megy, akkor világos, hogy a tolvajnak is a rendőrökkel a rendőrségre kell menni.

2.5.4. Néhány nevezetes sorozat határértéke

Az alábbiakban néhány, a feladatmegoldások során gyakran előforduló sorozat konvergenciáját vizsgáljuk. A későbbiekben felhasználjuk a Jacob Bernoulli nevéhez fűződő egyenlőtlenséget, amelyet a következő tételben fogalmazunk meg. A tétel teljes indukcióval bizonyítható.

2.20. Tétel. *(Bernoulli-egyenlőtlenség). Ha $h > -1$ valós szám, akkor minden n természetes számra*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

A következőkben megadjuk néhány nevezetes sorozat határértékét, amelyeket *alaphatárértékeknek* nevezünk.

I. *Ha $a_n = c$, akkor a sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

Bizonyítás. Az $a_n = c$ egy állandó elemű sorozat. Maga az állítás a határérték definíciója alapján nyilvánvaló. $\diamond$

II. *Ha $a_n = \dfrac{1}{n}$, akkor a sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Bizonyítás. Ennek belátásához a 2.10. Definíció szerint azt kell megmutatni, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan N (N függ ε-tól!), hogy ha $n \geq N$, akkor $|a_n - 0| < \varepsilon$. Mivel

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

ezért az $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ választás megfelel. $\diamond$

III. *Ha q tetszőleges valós szám és $a_n = q^n$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q| < 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } |q| > 1 \text{vagy } q = -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Először a $|q| < 1$ esetet vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy $n \geq N$ esetén $|q^n - 0| < \varepsilon$. A $|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$ egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

egyenlőtlenséggel. Alkalmazzuk a Bernoulli egyenlőtlenséget $1 + h = \frac{1}{|q|}$ választás esetén. Ekkor ε-t úgy választjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > \frac{1}{\varepsilon}$$

teljesüljön, vagyis $|q^n - 0| < \varepsilon$. A fenti egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$n \geq \left[\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}\right] + 1 = N.$$

Másodszor a $q = 1$ esettel foglalkozunk. Ekkor $q^n = 1$ minden n-re, így $a_n = 1$ állandó elemű sorozatunk van. Ez pedig konvergens és határértéke 1.
Harmadszor a $q = -1$ és a $|q| > 1$ eseteket bizonyítjuk. Ha $q = -1$, akkor $q^{2n} = 1$ és $q^{2n-1} = -1$. Ezek szerint a sorozatnak végtelen sok eleme 1, illetve -1, azaz a sorozatnak két torlódási pontja is van, ezért divergens. Ha $|q| > 1$, akkor alkalmazzuk a Bernoulli egyenlőtlenséget a $1 + h = q^2$ választás mellett. Ekkor $q^{2n} \geq 1 + n(q^2 - 1)$, vagyis az $a_n = q^n$ sorozat páros elemeiből álló részsorozata $1 < |q|$ esetén minden határon túl nő, tehát az $\{a_n\}$ sorozat nem lehet konvergens, így divergens. $\diamond$

IV. *Ha $a > 0$ és $a_n = \sqrt[n]{a}$, akkor a sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Bizonyítás. Ha $a = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló.
Ha $a > 1$, akkor megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan ε-tól függő N, hogy $n \geq N$ esetén $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Az

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$

ekvivalens az $a < (1+\varepsilon)^n$ egyenlőtlenséggel. Alkalmazzuk a Bernoulli egyenlőtlenséget $h = \varepsilon$ választás esetén. Ekkor

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > n\varepsilon,$$

így ha $a < n\varepsilon$ teljesül, akkor teljesül, hogy $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Az $a < n\varepsilon$ egyenlőtlenség pedig minden $n \geq \dfrac{a}{\varepsilon}$ természetes számra igaz, ezek szerint $N = \left[\dfrac{a}{\varepsilon}\right] + 1$.
Ha $0 < a < 1$, akkor megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan ε-tól függő N, hogy $n \geq N$ esetén $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Az

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon$$

ekvivalens az $a > (1-\varepsilon)^n$ egyenlőtlenséggel, ha $0 < a < 1$ és $\varepsilon < 1$. Tehát most $(1-\varepsilon)^n \to 0$, így van olyan N küszöbszám, hogy a kért tulajdonság teljesül. $\diamond$

V. *Ha* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, *akkor a sorozat konvergens és*

$$\lim_{b\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bizonyítás. Legyen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Először megmutatjuk (a Bernoulli egyenlőtlenség akalmazásával), hogy az $\{a_n\}$ sorozat növekvő.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \geq$$

$$\geq \left(1 + n\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$

Ebből következik, hogy $a_{n+1} > a_n$, azaz az $\{a_n\}$ sorozat növekvő.
Mutassuk még meg, hogy az $\{a_n\}$ sorozat korlátos is. Ehhez vegyük a

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

általános elemű sorozatot. Ugyanazokkal a fogásokkal, amelyekkel az $\{a_n\}$ sorozatról beláttuk, hogy növekvő, a $\{b_n\}$ sorozatról megmutatjuk, hogy csökkenő. Könnyen belátható, hogy

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-n-2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \geq$$

$$\geq \left(1 + (n+1)\frac{1}{n(n+2)}\right) \frac{n+1}{n+2} = 1 + \frac{1}{n(n+2)^2} > 1.$$

Ebből következik, hogy $b_{n+1} < b_n$, azaz a $\{b_n\}$ sorozat csökkenő.

A b_n és az a_n közötti

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

összefüggésből következik, hogy $a_n < b_n$ minden n-re. Az $\{a_n\}$ sorozat növekvő, a $\{b_n\}$ pedig csökkenő lévén, minden n-re fennáll az $a_1 \leq a_n < b_1$ egyenlőtlenség, ami azt jelenti, hogy az $\{a_n\}$ sorozat korlátos.
Az $\{a_n\}$ sorozat növekvő és korlátos, tehát konvergens is, határértékét pedig jelöljük e-vel, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Az e a nevezetes *Euler-féle szám*, amely irracionális és

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045...$$

Ha egy sorozat konvergens, akkor minden részsorozata is konvergens és ugyanoda konvergál ahová az eredeti sorozat. Ezért a természetes számok sorozatának bármely n_k részsorozatára

$$\lim_{n_k\to\infty} \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

◇

Bizonyítás nélkül megemlítünk még egy fontos alaphatárértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

FELADATOK.

Igazoljuk a definíció alkalmazásával az alábbi határértékek helyességét. Adott ε esetén számoljuk ki az N küszöbszámot.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Megoldás. Ha ε tetszőlegesen megadott pozitív szám, akkor

$$|a_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

teljesül, amennyiben $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Találtunk tehát ε-hoz megfelelő küszöbszámot, s ez $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Ha $\varepsilon = 10^{-3}$, akkor a küszöbszám $N = \left[\dfrac{1}{10^{-3}}\right] + 1 = 1001$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Megoldás. Ha ε tetszőlegesen megadott pozitív szám, akkor

$$|a_n - A| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Amennyiben $n > \frac{1}{\varepsilon}$, akkor a küszöbszám $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Amennyiben $\varepsilon = 10^{-5}$, akkor a megfelelő küszöbszám $N = \left[\frac{1}{10^{-5}}\right] + 1 = 100001$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$, $\varepsilon = 10^{-4}$

Megoldás. Amennyiben ε tetszőlegesen megadott pozitív szám, akkor

$$|a_n - A| = \left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-2}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Ha $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, azaz $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ akkor a küszöbszám $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$. $\varepsilon = 10^{-4}$ esetén a megfelelő küszöbszám $N = \left[\frac{1}{10^{-4}} - 1\right] + 1 = 10000$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}$, $\varepsilon = 0.0025$

Megoldás. Tetszőlegesen megadott ε pozitív számra

$$|a_n - A| = \left|\frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3n-2) - 3(2n-1)}{2(2n-1)}\right| =$$

$$= \left|\frac{6n-4-6n+3}{2(2n-1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n-1)}\right| = \frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon.$$

Ha $4n-2 > \frac{1}{\varepsilon}$, azaz $n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, akkor a megfelelő küszöbszám $N = \left[\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right] + 1$. Ha $\varepsilon = 0.0025$, akkor a küszöbszám

$$N = \left[\frac{1}{4 \cdot 0.0025} - \frac{1}{2}\right] + 1 = [100 - 0.5] + 1 = [99.5] + 1 = 100.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{7-5n} = -\frac{4}{5}$, $\varepsilon = 0,0004$

Megoldás. Tetszőlegesen megadott ε pozitív számra

$$|a_n - A| = \left|\frac{4n+1}{7-5n} + \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{5(4n+1) + 4(7-5n)}{5(7-5n)}\right| =$$

$$= \left|\frac{20n+5+28-20n}{5(7-5n)}\right| = \left|\frac{33}{5(7-5n)}\right| = \frac{33}{5(5n-7)} < \varepsilon.$$

Ha $25n - 35 > \frac{33}{\varepsilon}$, azaz $n > \frac{33}{25\varepsilon} + \frac{7}{5}$, akkor $N = \left[\frac{33}{25\varepsilon} + \frac{7}{5}\right] + 1$ a megfelelő küszöbszám. $\varepsilon = 0,004$ esetén a küszöbszám

$$N = \left[\frac{33}{25 \cdot 0,0004} + \frac{7}{5}\right] + 1 = \left[3300 + \frac{7}{5}\right] + 1 = 3302.$$

A következő feladatokban számítsuk ki az $\{a_n\}$ sorozat határértékét.

A $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték esetében úgy szüntethetjük meg a határozatlanságot, hogy a számlálót és a nevezőt elosztjuk ugyanazzal a végtelenhez tartó kifejezéssel, vagy ami ugyanaz, a számlálóból is és a nevezőből is kiemeljük ugyanazt a végtelenhez tartó kifejezést és ezzel egyszerűsítünk.

6. $a_n = \dfrac{2n-3}{7n+5}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{7n+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n\left(7+\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}}{7+\frac{5}{n}} = \frac{2}{7}.$$

7. $a_n = \dfrac{999n+1000}{n^2-n+1}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{999n+1000}{n^2-n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{999}{n}+\frac{1000}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

8. $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(2n+1)(3n+2)}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(2n+1)(3n+2)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})n(1+\frac{2}{n})n(1+\frac{3}{n})}{n\cdot n(2+\frac{1}{n})n(3+\frac{2}{n})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{(2+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})} = \frac{1\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

9. $a_n = \dfrac{n+2}{\sqrt{n^2+3}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+3}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+3}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

10. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n^2}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{n}}} = \frac{2}{1} = 2.$$

11. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{3n^2+7n+1}}{2n+3}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3n^2+7n+1}}{2n+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{3n^2+7n+1}{n^3}}}{\frac{2n+3}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

12. $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}}}{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n\sqrt{n}}}}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

13. $a_n = \dfrac{2^n + 2\cdot 3^{n+1}}{5\cdot 2^{n+1} + 3^n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 2\cdot 3^{n+1}}{5\cdot 2^{n+1} + 3^n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(\frac{2^n}{3^n} + 2\cdot 3\right)}{3^n\left(5\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 6}{10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1} = \frac{0+6}{0+1} = 6.$$

14. $a_n = \dfrac{(n+1)(n^2+1)(n^3+1)\cdots(n^{100}+1)}{((100n)^{100}+1)^{\frac{101}{2}}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)(n^3+1)\cdots(n^{100}+1)}{((100n)^{100}+1)^{\frac{101}{2}}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdot n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\cdots n^{100}\left(1+\frac{1}{n^{100}}\right)}{\left(n^{100}\left(100^{100}+\frac{1}{n^{100}}\right)\right)^{\frac{101}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+2+3+\cdots+100}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^{100}}\right)}{n^{\frac{100\cdot 101}{2}}\left(100^{100}+\frac{1}{n^{100}}\right)^{\frac{101}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5050}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^{100}}\right)}{n^{5050}\left(100^{100}+\frac{1}{n^{100}}\right)^{\frac{101}{2}}} = \frac{1}{(100^{100})^{\frac{101}{2}}} = \frac{1}{100^{5050}}.$$

15. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}-3}{\sqrt[4]{n^2+5n}+\sqrt[3]{2n^2}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-3}{\sqrt[4]{n^2+5n}+\sqrt[3]{2n^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n^2+1}-3}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{\sqrt[4]{n^2+5n}+\sqrt[3]{2n^2}}{\sqrt[3]{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[12]{\frac{(n^2+5n)^3}{n^8}}+\sqrt[3]{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[12]{\frac{1}{n^2}(1+\frac{5}{n})^3}+\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Ha a határérték $\infty-\infty$ típusú határozatlan kifejezés, akkor irracionális kifejezés esetén gyöktelenítéssel, törtek különbsége esetén közös nevezőre hozással tudunk megszabadulni a határozatlanságtól.

16. $a_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) = \infty-\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

17. $a_n = \sqrt{n^2-2n+3}-n$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right) = \infty-\infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-2n+3}+n}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} = \frac{-\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = \frac{-2}{\sqrt{1}+1} = -1.$$

18. $a_n = \sqrt{4n^4+3n^2}-2n^2$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^4+3n^2}-2n^2\right) = \infty-\infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)\frac{\sqrt{4n^2+3}+2n}{\sqrt{4n^2+3}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(4n^2+3-4n^2\right)}{\sqrt{4n^2+3}+2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}+2\right)} = \frac{3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{4}.$$

19. $a_n = n - \sqrt[3]{n^3+4}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n - \sqrt[3]{n^3+4}\right) = \infty - \infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3} - \sqrt[3]{n^3+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(n^3)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}}{\sqrt[3]{(n^3)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n^3+4)}{\sqrt[3]{n^6}+\sqrt[3]{n^3(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-4}{n^2+\sqrt[3]{n^3(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}} = \frac{-4}{\infty} = 0.$$

20. $a_n = \dfrac{21\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+15n-10}-\sqrt{n^2-6n+5}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+15n-10}-\sqrt{n^2-6n+5}} = \frac{const}{\infty-\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+15n-10}-\sqrt{n^2-6n+5}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+15n-10}+\sqrt{n^2-6n+5}}{\sqrt{n^2+15n-10}+\sqrt{n^2-6n+5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}\left(\sqrt{n^2+15n-10}+\sqrt{n^2-6n+5}\right)}{n^2+15n-10-(n^2-6n+5)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}\left(\sqrt{n^2+15n-10}+\sqrt{n^2-6n+5}\right)}{21n-15} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{15}{n}-\frac{10}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}{21-\frac{15}{n}} = \frac{21\sqrt{2}\cdot 2}{21} = 2\sqrt{2}.$$

21. $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^2+2n+3}-\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+7n-1}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2n+3}-\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+7n-1}} = \frac{\infty-\infty}{\infty-\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2n+3}-\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+7n-1}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2n^2+2n+3}+\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{2n^2+2n+3}+\sqrt{2n^2+6n+5}}\cdot\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}+\sqrt{3n^2+7n-1}}{\sqrt{3n^2+5n+1}+\sqrt{3n^2+7n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+3-(2n^2+6n+5)}{3n^2+5n+1-(3n^2+7n-1)}\cdot\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}+\sqrt{3n^2+7n-1}}{\sqrt{2n^2+2n+3}+\sqrt{2n^2+6n+5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-4n-2}{-2n+2}\cdot\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}+\sqrt{3n^2+7n-1}}{\sqrt{2n^2+2n+3}+\sqrt{2n^2+6n+5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-4-\frac{2}{n}}{-2+\frac{2}{n}} \cdot \frac{\sqrt{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{3+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}}} = \frac{-4}{-2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

22. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n-\sqrt[3]{n^3+2}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n-\sqrt[3]{n^3+2}} = \frac{\infty-\infty}{\infty-\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n-\sqrt[3]{n^3+2}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+2)}+\sqrt[3]{(n^3+2)^2}}{\sqrt[3]{(n^3)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+2)}+\sqrt[3]{(n^3+2)^2}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1-n^2}{n^3-n^3-2} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^6}+\sqrt[3]{n^3(n^3+2)}+\sqrt[3]{(n^3+2)^2}}{\sqrt{n^2+1}+n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}+\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n^3})^2}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{n\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}+\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n^3})^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \right) = -\frac{1}{2}\cdot\infty = -\infty.$$

23. $a_n = \sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^3+5n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^3+5n}\right) = \infty-\infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3}-n+n-\sqrt[3]{n^3+5n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right) + \lim_{n\to\infty} \left(n-\sqrt[3]{n^3+5n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n+3}+n}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \left(n-\sqrt[3]{n^3+5n}\right) \cdot \frac{n^2+n\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(n^3+5n)^2}}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(n^3+5n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-(n^3+5n)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(n^3+5n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} + \lim_{n\to\infty} \frac{-5n}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(n^3+5n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{-5}{n+\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(1+n^2)^2}} = 1-0 = 1.$$

24. $a_n = \dfrac{5n^2+2}{10n-1} - \dfrac{2n^2+1}{4n+3}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+2}{10n-1} - \frac{2n^2+1}{4n+3}\right) = \infty - \infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(5n^2+2)(4n+3) - (2n^2+1)(10n-1)}{(10n-1)(4n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{20n^3+15n^2+8n+6-20n^3+2n^2-10n+1}{(10n-1)(4n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{17n^2-2n+7}{(10n-1)(4n+3)} = \frac{17}{40}.$$

25. $a_n = \dfrac{3n^2}{2n+1} + \dfrac{1-6n^3}{1+4n^2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{2n+1} + \frac{1-6n^3}{1+4n^2}\right) = \infty - \infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2(1+4n^2) + (1-6n^3)(2n+1)}{(2n+1)(1+4n^2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+12n^4+2n+1-12n^4-6n^3}{(2n+1)(1+4n^2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-6n^3+3n^2+2n+1}{(2n+1)(1+4n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-6+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{(2+\frac{1}{n})(\frac{1}{n^2}+4)} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

Ha a határérték 1^∞ típusú, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ alaphatárérték alkalmazásával oldható fel a határozatlanság, vagy erre vezetjük vissza $f(n) = t$ helyettesítéssel, ha $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}$ alakú, de csak abban az esetben, ha $n \to \infty$ esetén $f(n) \to \infty$ is érvényes.

26. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = e\cdot 1 = e.$$

27. $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{n\cdot\frac{3}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 == \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^3 = e^3,$$

ahol bevezettük az $\dfrac{n}{3} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

28. $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^n$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e},$$

ahol bevezettük a $3n = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

29. $a_n = \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^{3n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^{3n} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{3n\cdot\frac{5}{5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{15} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{15} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{15} = e^{15},$$

ahol bevezettük az $\dfrac{n}{5} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

30. $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{\frac{n+1}{2}} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-2}\right)^{\frac{n+1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n-2}{3}}\right)^{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{3n-2}{3}\cdot\frac{3}{3n-2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n-2}{3}}\right)^{\frac{3n-2}{3}}\right]^{\frac{3n+3}{6n-4}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n-2}{3}}\right)^{\frac{3n-2}{3}}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{6n-4}} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{6n-4}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e},$$

ahol bevezettük az $\dfrac{3n-2}{3} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

31. $a_n = \left(\dfrac{6n+1}{6n-2}\right)^{n^2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n+1}{6n-2}\right)^{n^2} = 1^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-2+3}{6n-2}\right)^{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{6n-2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{6n-2}{3}}\right)^{\frac{6n-2}{3}\cdot\frac{3}{6n-2}\cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{6n-2}{3}}\right)^{\frac{6n-2}{3}}\right]^{\frac{3n^2}{6n-2}} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{6n-2}{3}}\right)^{\frac{6n-2}{3}}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{6n-2}} =$$

$$= \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{6n-2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{6n-2}} = e^{\infty} = \infty,$$

ahol bevezettük a $\dfrac{6n-2}{3} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

32. $a_n = \left(\dfrac{2n^2+n+1}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1} = 1^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+1}{2n^2-n+1}-1\right)^{3n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+1-2n^2+n-1}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right)^{(3n+1)\cdot\frac{2n^2-n+1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right)^{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right]^{\frac{2n(3n+1)}{2n^2-n+1}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right)^{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n(3n+1)}{2n^2-n+1}} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+2n}{2n^2-n+1}} = e^3,$$

ahol bevezettük a $\dfrac{2n^2-n+1}{2n} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

33. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{1 \cdot e} = \frac{1}{e},$$

ahol bevezettük a $n - 1 = k$ helyettesítést, amelynél $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

34. $a_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{\frac{4n+2}{3}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{\frac{4n+2}{3}} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+3}{n+2}}\right)^{\frac{4n+2}{3}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n+2}}\right)^{\frac{4n+2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{\frac{4n+2}{3} \cdot \frac{n+2}{n+2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{4n+2}{3n+6}}} =$$

$$= \frac{1}{\left[\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+2}{3n+6}}} = \frac{1}{\left[\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+2}{3n+6}}} = \frac{1}{e^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^4}} = \frac{1}{e\sqrt[3]{e}},$$

ahol bevezettük a $n + 2 = k$ helyettesítést, amelynél $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

35. $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+5}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+5} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n^2+3}{n^2+2}}\right)^{n^2+5} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+5}} = \frac{1}{e},$$

mivel

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+2+3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2+2}\right)^3\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+2}\right)^3 = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot 1 = e,$$

ahol bevezettük a $n^2 + 2 = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

A következő három feladatban használjuk fel a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ alaphatárértékeket, ahol a pozitív valós szám, hogy a feloldjuk a határozatlanságot a ∞^0 típusú határozatlan kifejezéseknél.

36. $a_n = \sqrt[n]{5n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n} = \left(\infty^0\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{5} \cdot \sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

37. $a_n = \sqrt[n]{7n^2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7n^2} = \left(\infty^0\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{7} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2 = 1.$$

38. $a_n = \sqrt[n]{3n+2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2} = \left(\infty^0\right).$$

A határértéket a *Rendőr-elv* alapján oldjuk meg. Mivel $n \geq 2$ esetén

$$3n < 3n+2 \leq 3n+n, \quad \text{vagyis} \quad 3n \leq 3n+2 \leq 4n,$$

ezért

$$\sqrt[n]{3n} \leq \sqrt[n]{3n+2} \leq \sqrt[n]{4n},$$

és a megfelelő tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n},$$

vagyis

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2} \leq 1,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2} = 1.$$

A következő két sorozat határértékét számoljuk ki a monotonitási és korlátossági tulajdonság felhasználásával.

39. $a_n = \dfrac{c^n}{n!}$, $c > 0$

Megoldás. Az $\{a_n\}$ pozitív tagú sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{c^n}{n!}} = \frac{\frac{c\cdot c^n}{(n+1)\cdot n!}}{\frac{c^n}{n!}} = \frac{c}{n+1} < 1,$$

ha $n > c-1$, tehát a $(c-1)$-től nagyobb indexekre érvényes lesz az a feltétel, hogy $a_{n+1} < a_n$. Mivel az $\{a_n\}$ sorozat pozitív tagú, ezért alulról korlátos (például a

0-val) és szigorúan monoton csökkenő, ezért ez a sorozat konvergens, tehát létezik határértéke. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{és} \quad a_{n+1} = a_n \cdot \frac{c}{n+1},$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{c}{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1}.$$

Ebből következik, hogy $a = a \cdot 0$, illetve $a = 0$, amely alapján kimondható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0, \quad \text{ha} \quad c > 0.$$

40. $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$, ahol n gyök szerepel a kifejezésben

Megoldás. Igazoljuk először, hogy $a_n < 2$ minden n természetes számra. Ennek bizonyítását matematikai indukcióval végezzük.

1^o $n = 1$ esetén $a_1 = \sqrt{2} < 2$.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, azaz $a_k < 2$.

3^o Az állítás $n = k + 1$ esetén is igaz, mert $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$, tehát $\{a_n\}$ korlátos sorozat.

Igazoljuk most szintén matematikai indukcióval, hogy $a_n < a_{n+1}$ minden n természetes számra.

1^o $n = 1$ esetén $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, azaz $a_k < a_{k+1}$.

3^o Az állítás $n = k + 1$ esetén is igaz, mert $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + a_{k+1}} = a_{k+2}$, tehát $\{a_n\}$ szigorúan monoton növekvő sorozat.

Mivel az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos (például a 2-vel), ezért ez a sorozat konvergens, tehát létezik határértéke. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{valamint} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Ebből következik, hogy $a_{n+1}^2 = 2 + a + n$, illetve

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_{n+1} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} (2 + a_n)$$

ahonnan $a^2 = 2 + a$. Ebből az egyenletből $a = 2$ vagy $a = -1$ következik, de a pozitivitás miatt $a = 2$ az egyetlen megoldás. Ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2.$$

2.5.5. Végtelen mértani sor

2.17. Definíció. *Egy mértani sorozat elemeiből képzett végtelen sok tagú "összeget" végtelen mértani sornak nevezzük.*

Tekintsük az $a,\ aq,\ aq^2, \ldots,\ aq^{n-1}, \ldots$ mértani sorozatot, ahol $a \neq 0$ és $q \neq 0$. Tudjuk, hogy a mértani sorozat első n elemének összege

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ha a mértani sorozat minden elemét össze akarjuk adni, akkor valójában az

$$S = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \ldots$$

összeget keressük, amelynek értékét a mértani sor $\{S_n\}$ részletösszeg sorozatának határértékeként tudunk kiszámolni, vagyis az

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

képlet segítségével, amennyiben ez a határérték létezik. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n) = \frac{a}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right),$$

így megállapíthatjuk, hogy ez a határérték csak $|q| < 1$ esetén létezik, ugyanis csak akkor konvergens a $\{q^n\}$ sorozat. $q \leq -1$ és $q > 1$ esetében $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ nem létezik, tehát az S összeg sem számítható ki. $q = 1$ esetén $S_n = n \cdot a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n \cdot a) = \pm\infty$ (az első elem előjelétől függően). Ezek szerin a végtelen mértani sor összege

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Ezt a képletet szokás

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

alakban is írni, kihangsúlyozva, hogy a_1 a mértani sorozat első eleme.

2.35. Példa. Ha az

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

szeretnénk kiszámítani, akkor azt kell észrevennünk, hogy ennek a végtelen összegnek a tagjai

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2}, \cdots,\ \frac{1}{2^n}, \cdots$$

egy mértani sorozat elemei, amelyben $a_1 = 1$ és $q = \dfrac{1}{2}$. Mivel a hányados eleget tesz a $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ feltételnek, így a végtelen mértani sor összege

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

FELADATOK.

1. Számítsuk ki az $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \cdots + (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots$ végtelen összeget.

Megoldás. Az összeg egy végtelen mértani sor, mert tagjai az

$$1,\ -\frac{3}{4},\ \frac{9}{16},\ -\frac{27}{64},\ \cdots,\ (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n,\ \cdots$$

mértani sorozat elemei, amelynek hányadosa $q = -\frac{3}{4}$ eleget tesz az $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$ feltételnek, ezért a keresett összeg

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}.$$

2. Számítsuk ki az $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$ végtelen összeget, ha tudjuk, hogy $|x| < 1$.

Megoldás. Ha $|x| < 1$, akkor $|x^2| < 1$ is érvényes. A keresett összeg egy végtelen mértani sor, mert az $1,\ x^2,\ x^4,\ x^6,\ \cdots$ elemekkel rendelkező és $q = x^2$ hányadosú mértani sorozat elemeit adjuk össze. Mivel a hányadosra teljesül a $|q| < 1$ feltétel, ezért a keresett S összeg létezik és

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-x^2}.$$

3. Írjuk fel tört alakjában az $1,\overline{34}$ szakaszos tizedes számot.

Megoldás. Írjuk fel az adott számot több tizedes számjeggyel és bontsuk fel a következő módon:

$$1,\overline{34} = 1,343434\cdots = 1 + 0,34 + 0,0034 + 0,000034 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{34}{100} + \frac{34}{10000} + \frac{34}{1000000} + \cdots$$

Vegyük észre, hogy a második tagtól kezdve egy végtelen mértani sor tagjait kell összegeznünk, melyben $a_1 = \frac{34}{100}$ és $q = \frac{1}{100}$, amelyre $\left(\frac{1}{100}\right) < 1$. Ezért

$$1,\overline{34} = 1 + \frac{\frac{34}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 1 + \frac{34}{99} = \frac{133}{99}.$$

4. Az $a = 1$ befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög oldalainak felezőpontjait összekötve egy újabb egyenlőszárú derékszögű háromszöget kapunk. Felezzük meg ennek az oldalait is és újra kössük össze a felezőpontokat. Folytassuk ezt az eljárást a végtelenségig, majd számítsuk ki az eredeti és a beírt háromszögek kerületeinek és területeinek összegét.

Megoldás. Ha az egyenlőszárú derékszögű háromszög oldala a, akkor kerülete $K = 2a + a\sqrt{2} = a(2+\sqrt{2})$, területe pedig $T = \frac{a^2}{2}$. Az eredetivel együtt

a háromszögek befogói sorban az a, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{8}$, ... mértani sorozatot adják. A háromszögek kerületeinek összege

$$K = a(2+\sqrt{2}) + \frac{a}{2}(2+\sqrt{2}) + \frac{a}{4}(2+\sqrt{2}) + \frac{a}{8}(2+\sqrt{2}) + \cdots,$$

ahonnan

$$K = a(2+\sqrt{2})\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = a(2+\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2a(2+\sqrt{2}).$$

Mivel $a = 1$, így az összes háromszög kerületének összege $K = 2(2+\sqrt{2}) = 4+2\sqrt{2}$. A háromszögek területeinek összege

$$T = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{8}\right)^2 + \cdots,$$

ahonnan

$$T = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \right) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2a^2}{3}.$$

Mivel $a = 1$, így az összes háromszög területének összege $T = \frac{2}{3}$.

5. Az adott R sugarú körbe írjunk egyenlőoldalú háromszöget, majd abba kört, és folytassuk ezt az eljárást a végtelenségig. Számítsuk ki a körök kerületeinek és a háromszögek területeinek összegét.

Megoldás. Az R sugarú körbe írt egyenlőoldalú háromszög oldala $a = R\sqrt{3}$. Ha ebbe a háromszögbe kört írunk, akkor annak sugara $R_1 = \frac{R}{2}$, az újabb beírt egyenlőoldalú háromszög oldala pedig $a_1 = \frac{a}{2}$. Ezért a körök sugarai és az egyenlőoldalú háromszögek oldalai az R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$, $\frac{R}{8}$, ... és az a, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{8}$, ... mértani sorozatokat alkotják. A körök kerületeinek összege

$$K = 2R\pi + 2 \cdot \frac{R}{2}\pi + 2 \cdot \frac{R}{4}\pi + 2 \cdot \frac{R}{8}\pi + \cdots,$$

amelyből rendezés után

$$K = 2R\pi\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = 2R\pi \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4R\pi,$$

vagyis az öszes így előállított kör kerületének összege $K = 4R\pi$. Az említett módon előállított háromszög területének összege

$$T = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a}{8}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \cdots,$$

amely rendezés után a

$$T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

kifejezést adja. Mivel $a = R\sqrt{3}$, így az összes háromszög területének összege

$$T = \frac{3R^2\sqrt{3}}{3} = R^2\sqrt{3}.$$

3. Egyváltozós valós függvények

3.1. Valós függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak

3.1.1. A függvények megadása

Az első fejezetben általánosan értelmeztük a függvényt. Most csak olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyeknek értelmezési tartománya és képtartománya is valós számokból áll. Az ilyen $f : A \subset \mathbf{R} \to B \subset \mathbf{R}$ függvényeket egyváltozós valós függvényeknek nevezzük, s a latin vagy a görög ábécé betűivel jelöljük, például: f, g, h,..., φ, ψ, ϑ stb.
Az A halmazt az f függvény *értelmezési tartományának (domenjének)* nevezzük és D_f-fel jelöljük, míg a B halmazt az f függvény *értékkészletének (kodomenjének)* nevezzük és R_f-fel jelöljük. Valós függvényeknél általában a független változó jelölésére az x, a függő változó jelölésére az y betűt használjuk, de ha szükséges, akkor más betűket is használhatunk. A függvény jelölésénél sokszor az $y = f(x)$ szimbólumot használjuk, ami azt jelenti, hogy y *valamilyen függvénye* x*-nek.*
Ha $x_0 \in D_f$, akkor az f függvény x_0 ponthoz rendelt értékét $f(x_0)$-lal jelöljük, és az f függvény x_0 pontban felvett *helyettesítési értékének* nevezzük. Ha $f(x_0) = 0$, akkor x_0 az f függvény *zérushelye* vagy *nullahelye.*
A valós függvény megadásához nem elég csak az értelmezési tartományt és az értékkészletet megadni, azt is tudnunk kell, hogyan találhatjuk meg a független változó egyes értékeihez tartozó függvényértéket, vagyis ismernünk kell a *hozzárendelési törvényt.* A hozzárendelési törvény megadása sokféleképpen történhet. A függvény hozzárendelési törvényét például megadhatjuk *táblázattal.* Ez abban áll, hogy kiírjuk a független változó számos értékét, s melléírjuk a nekik megfelelő függvényértéket. A függvények táblázattal való megadásának fő hiányossága a nagy terjedelem és a szemléletesség hiánya, de ettől függetlenül igen elterjedt megadási mód a természettudományokban és a műszaki tudományokban.
A függvény megadásának legfontosabb módja a *képlettel* (*formulával*) való megadás. Ekkor megadunk egy olyan képletet, amely az x független változón kívül csupa adott számot tartalmaz. Ha képlettel adjuk meg a függvényt, akkor az értelmezési tartományt mindazok a valós számok alkotják, amelyre a képletben szereplő műveletek mindegyike elvégezhető és a képlet valós értéket vesz fel.
Adott f és g valós függvényekből képzett összetett függvények értelmezési tartományának meghatározásakor figyelembe kell venni a következőket:

1. $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ esetén $g(x) \neq 0$.

2. $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ esetén $f(x) \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$.

3. $y = \log_a f(x)$ esetén $f(x) > 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

4. $y = \operatorname{tg} f(x)$ esetén $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$.

5. $y = \operatorname{ctg} f(x)$ esetén $f(x) \neq k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$.

6. $y = \arcsin f(x)$ és $y = \arccos f(x)$ esetén $-1 \leq f(x) \leq 1$.

3.1. Példa. Az $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-4x^2}$ függvény racionális törtfüggvény, ezért a nevezője nem lehet nulla. Keressük meg tehát a nevező nullahelyeit és zárjuk ki azokat az értelmezési tartományból. $x^3 - 4x^2 = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(x-2)(x+2) = 0$, innen pedig megkapjuk, hogy a nevező nulla, ha $x = 0$, vagy ha $x = 2$, vagy ha $x = -2$. Ezért az értelmezési tartomány $D_f = R \setminus \{-2, 0, 2\}$, vagy más felírásban

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty).$$

3.2. Példa. Az $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ függvény páros gyökkitevőjű irracionális függvény, ezért a gyök alatti mennyiség nem lehet negatív, vagyis teljesülnie kell az $x^2 - 16 \geq 0$, illetve $(x-4)(x+4) \geq 0$ egyenlőtlenségnek. Oldjuk meg táblázattal ezt a másodfokú egyenlőtlenséget.

D_f	$(-\infty, -4)$	$(-4, 4)$	$(4, \infty)$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
x^2-16	$+$	$-$	$+$

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy az f függvény csak a $(-4, 4)$ intervallumon negatív, tehát

$$D_f = (-\infty, -4] \cup [4, \infty).$$

3.3. Példa. Mivel minden logaritmusfüggvény csak pozitív értékekre értelmezett, ezért az $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}\right)$ függvény csak akkor értelmezett, ha az $\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3} > 0$ egyenlőtlenség teljesül. Mivel $x^2 + 1 > 0$ minden valós számra, ezért a törtfüggvény előjele csak a nevezőtől függ. Bontsuk tényezőkre a nevezőt és oldjuk meg táblázattal az így kapott $(x-1)(x-3) > 0$ egyenlőtlenséget.

D_f	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
x^2-4x+3	$+$	$-$	$+$

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy az f függvény csak az $[1, 3]$ intervallumon nempozitív, tehát

$$D_f = (-\infty, 1) \cup (3, \infty).$$

3.4. Példa. Az $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ függvény nem értelmezett azokban a pontokban, ahol

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

illetve $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. A keresett értelmezési tartomány tehát

$$D_f = R \setminus \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

3.5. Példa. Az $f(x) = \arcsin \dfrac{6x}{x^2+9}$ függvény csak akkor értelmezett, ha a

$$-1 \leq \frac{6x}{x^2+9} \leq 1$$

egyenlőtlenségrendszer teljesül. Mivel a $\dfrac{6x}{x^2+9}$ nevezője minden valós számra pozitív, ezért mindkét egyenlőtlenséget szorozhatjuk x^2+9-cel. Ekkor $-x^2-9<6x<x^2+9$, azaz a

$$-x^2-9\le 6x \quad \text{és} \quad 6x\le x^2+9$$

egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük, azaz megoldáshalmazaik metszete adja az f függvény értelmezési tartományát. Mivel a fenti egyenlőtlenségrendszer ekvivalens az

$$-x^2-6x-9\le 0 \quad \text{és} \quad x^2-6x+9\ge 0,$$

illetve az

$$(x+3)^2\ge 0 \quad \text{és} \quad (x-3)^2\ge 0$$

egyenlőtlenségrendszerekkel, így látható, hogy mindkettő megoldáshalmaza az $\mathbf{R}$ halmaz, tehát metszetük is az, és így $D_f=\mathbf{R}$.

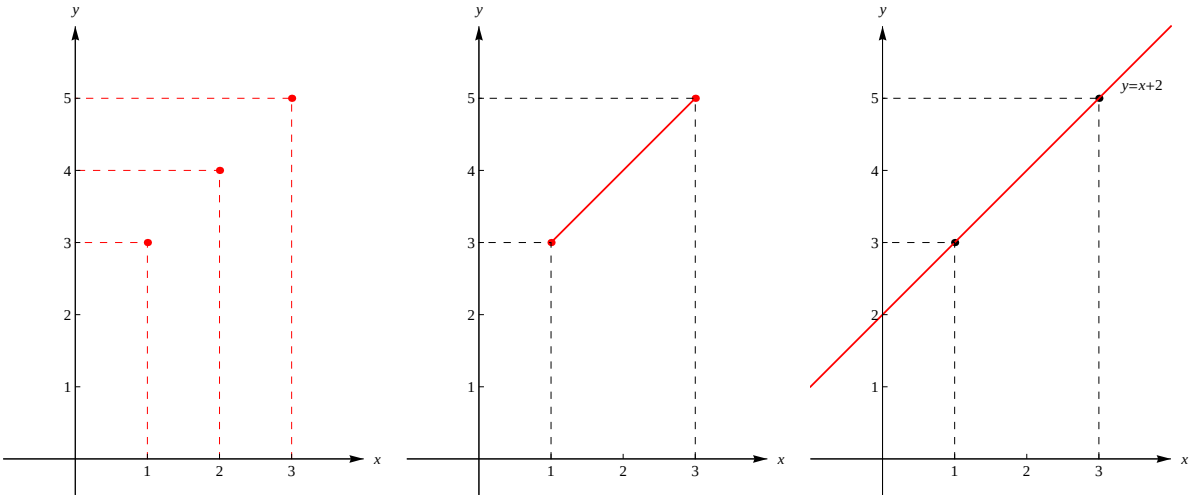
A függvény *grafikonja* vagy *görbéje* a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer által meghatározott síkban az olyan $(x,f(x))$ pontok halmaza, amelyek abszcisszái az x független változó értékei, ahol $x\in D_f$, ordinátái pedig az ezeknek megfelelő függvényértékek, azaz $y=f(x)$, s ezt az egyenletet nevezzük a függvénygörbe egyenletének. A függvény *grafikus megadása* azt jelenti, hogy a függvény grafikonját adjuk meg, és a független változó x_0 értékéhez tartozó $f(x_0)$ függvényérték a görbe x_0 abszcisszájú pontjának ordinátája. Gyakran előfordul, hogy a függvény grafikonja csak néhány pontból áll, mégis általánosan elterjedt, hogy a függvény grafikonját görbének nevezzük, s így a függvény és a görbe fogalma szorosan összefügg. Egy függvény megadása egy görbe, a függvény grafikonjának megadását jelenti, és fordítva: egy görbe megadásával egy függvényt is megadunk, azt a függvényt, amelynek a megadott görbe a grafikonja. Természetesen csak olyan görbét adhatunk meg függvény grafikonjaként, amely esetében az y-tengellyel párhuzamos egyenesek a görbét legfeljebb egy pontban metszhetik.

3.6. Példa. A mellékelt táblázattal megadott f függvény grafikonja mindössze három pontból áll, az $(1,3)$, $(2,4)$ és $(3,5)$ pontokból, mivel $D_f=\{1,2,3\}$.

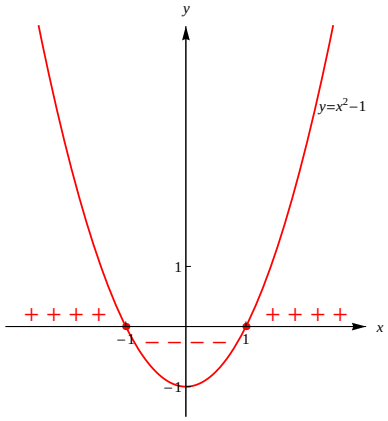
x	1	2	3
$f(x)$	3	4	5

3.7. Példa. Legyen az $f(x)=x+2$ függvény értelmezési tartománya $D_f=[1,3]$. Az f függvény grafikonja most az $y=x+2$ görbe $[1,3]$ intervallumhoz tartozó darabja, azaz az $(1,3)$ és $(3,5)$ pontokat összekötő szakasz.

3.8. Példa. Legyen az $f(x)=x+2$ függvény értelmezési tartománya most $D_f=\mathbf{R}$. Az f függvény grafikonja most az $y=x+2$ egyenes.



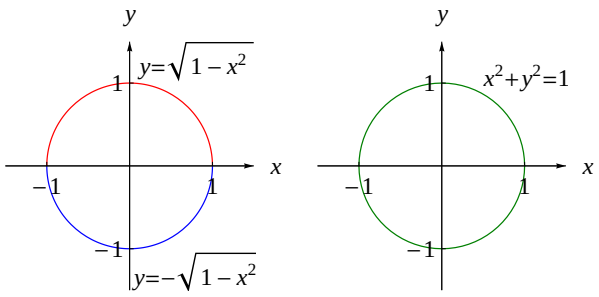
A függvény grafikonja a *függvény nullahelyében* metszi át az x-tengelyt. A függvény értelmezési tartományának azon pontjaiban, ahol a *függvényértékek pozitívak*, a függvény grafikonja az x-tengely felett van, az értelmezési tartomány azon pontjaiban pedig, ahol a *függvényértékek negatívak*, a függvény grafikonja az x-tengely alatt van.



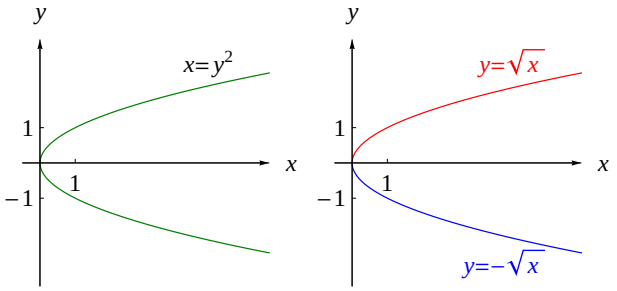
3.9. Példa. Az $f(x) = x^2 - 1$ függvény nullahelyei az $f(x) = 0$, illetve az $x^2 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai, azaz $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$. Az $y = x^2 - 1$ parabola tehát a $(-1, 0)$ és $(1, 0)$ pontokban metszi át az x-tengelyt, s mivel főegyütthatója pozitív, minimuma van. A függvény előjelét leolvashatjuk a grafikonról: $f(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, és $f(x) < 0$, ha $x \in (-1, 1)$.

A függvény $y = f(x)$ megadási módjára azt mondjuk, hogy a függvény *explicit alakban* van megadva. Ha használjuk ezt a jelölést, akkor az $F(x, y) = 0$ egyenlet is értelmezhet (egy vagy több) függvényt. Ekkor azt mondjuk, hogy $F(x, y) = 0$ egy *implicit alakban* megadott függvény.

3.10. Példa. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ az egységsugarú körvonal implicit alakú megadása. Mivel ebből $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, ezért $x^2 + y^2 - 1 = 0$ jelentheti az $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ függvényt, de az $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ függvényt is. Az f_1 függvény grafikonja az egységsugarú körvonal felső, pozitív félsíkhoz tartozó félköríve, az f_2 függvény grafikonja pedig az egységsugarú körvonal alsó, negatív félsíkhoz tartozó félköríve.



3.11. Példa. A parabola $x - y^2 = 0$ implicit alakú megadása, $y = \pm\sqrt{x}$ miatt jelentheti az $f_1(x) = \sqrt{x}$ függvényt, de az $f_2(x) = -\sqrt{x}$ függvényt is. Az f_1 függvény grafikonja a parabolagörbe felső, pozitív félsíkhoz tartozó íve, az f_2 függvény grafikonja pedig a parabolagörbe alsó, negatív félsíkhoz tartozó íve.



FELADATOK.

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát.

1. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+5}$

Megoldás. Mivel a racionális törtfüggvény nevezője nem nulla, hiszen $x^2 + 5 > 0$, ezért a függvény minden valós számra értelmezett, azaz $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3+6x^2+8x}$

Megoldás. A racionális törtfüggvény nevezője nem lehet nulla, azaz

$$x^3 + 6x^2 + 8x = x(x+4)(x+2) \neq 0$$

kell teljesüljön, amely feltétel akkor és csakis akkor igaz, ha $x \neq 0$ és $x \neq -4$ és $x \neq -2$. Az értelmezési tartomány tehát

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-4, -2, 0\} = (-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, \infty).$$

3. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}$

Megoldás. Páratlan gyökkitevőjű a függvény, tehát minden valós számra értelmezett, ezért most csak az alatta levő tört nevezőjére kell feltenni, hogy ne legyen nulla, azaz $x \neq 0$, így $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x - x^2}}$

Megoldás. A tört miatt a nevező nem lehet nulla, a páros gyökkitevőjű függvény alatti kifejezés pedig nem lehet negatív, így megállapíthatjuk, hogy a két feltétel összesítve az $5x - x^2 = x(5-x) > 0$ feltételhez vezet. Oldjuk meg táblázattal ezt a másodfokú egyenlőtlenséget.

D_f	$(-\infty, 0)$	$(0, 5)$	$(5, \infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$5 - x$	$+$	$+$	$-$
$5x - x^2$	$-$	$+$	$-$

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy az $5x - x^2$ másodfokú kifejezés csak a $(0, 5)$ intervallumon pozitív, tehát az f függvény értelmezési tartománya $D_f = (0, 5)$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5+x}} + \sqrt{-x}$

Megoldás. Figyelembe véve a törtet és a páros gyökkitevőjű függvényeket, a következő kikötéseket kell tennünk: $5 + x > 0$ és $-x \geq 0$. Az egyenlőtlenségek megoldáshalmazai $x > -5$ és $x \leq 0$, amelyek egyidőben $-5 < x \leq 0$ valós számokra teljesülnek, tehát $D_f = (-5, 0]$.

6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+5}{5-x}\right)$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak szigorúan pozitív értékekre értelmezett és a nevező nem lehet nulla, ezért az

$$\frac{x+5}{5-x} > 0$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Táblázatba foglalva a számláló és nevező tulajdonságait, a következőket kapjuk:

D_f	$(-\infty, -5)$	$(-5, 5)$	$(5, \infty)$
$x+5$	$-$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{x+5}{5-x}$	$-$	$+$	$-$

A táblázatból látható, hogy az $\dfrac{x+5}{5-x}$ törtkifejezés csak a $(-5, 5)$ intervallumon pozitív, tehát az f függvény értelmezési tartománya $D_f = (-5, 5)$.

7. $f(x) = \ln x^2$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak szigorúan pozitív értékekre értelmezett és $x^2 \geq 0$ minden valós számra. Ez azt jelenti, hogy csupán a nullát kell kizárni az értelmezési tartományból, azaz $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

8. $f(x) = \log_2(\cos x)$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak szigorúan pozitív értékekre értelmezett, ezért teljesülnie kell a $\cos x > 0$ feltételnek, ami azt jelenti, hogy az f függvény értelmezési tartománya azoknak az intervallumoknak az uniójából áll, amelyekben az $y = \cos x$ függvénygörbe az x-tengely fölött helyezkedik el. Ezért

$$D_f = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

9. $f(x) = \sqrt{\ln(x - x^2)}$

Megoldás. Vegyük figyelembe a logaritmusfüggvény és a páros gyökkitevőjű irracionális függvény értelmezettségét is. Ekkor teljesülnie kell a következő feltételeknek:

$$x - x^2 > 0 \quad \text{és} \quad \ln\left(x - x^2\right) \geq 0.$$

Az $\ln\left(x - x^2\right) \geq 0$ egyenlőtlenség akkor és csakis akkor igaz, ha $x - x^2 \geq 1$, vagyis az $x^2 - x + 1 \leq 0$ másodfokú egyenlőtlenség is teljesül. Az $x^2 - x + 1$ másodfokú trinomról megállapíthatjuk, hogy determinánsa $D = 1^2 - 4 = -3 < 0$, tehát az $y = x^2 - x + 1$ parabolának nincs valós nullahelye, viszont a főegyütthatója $a = 1 > 0$, vagyis konvex és minimuma van, ami azt jelenti, hogy minden valós számra szigorúan pozitív értéket vesz fel. Ezért az $x^2 - x + 1 \leq 0$ másodfokú egyenlőtlenség egyetlen egy valós számra sem teljesül, tehát $D_f = \emptyset$.

10. $f(x) = \sqrt{\ln(\sin x)}$

Megoldás. A logaritmusfüggvény és a páros gyökkitevőjű irracionális függvény értelmezettségét is figyelembe véve kikötjük, hogy teljesülnie kell a

$$\sin x > 0 \quad \text{és} \quad \ln(\sin x) \geq 0$$

feltételeknek, illetve az ezzel ekvivalens

$$\sin x > 0 \quad \text{és} \quad \sin x \geq 1$$

egyenlőtlenségrendszernek. Az egyenlőtlenségrendszer megoldását a $\sin x \geq 1$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza, illetve a $|\sin x| \leq 1$ feltétellel összesítve a $\sin x = 1$ egyenlet megoldáshalmaza adja meg. Ezért

$$D_f = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

11. $f(x) = \arccos \dfrac{2}{2 + \sin x}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy a tört nevezőjében szereplő $2+\sin x$ kifejezés mindig szigorúan pozitív, tehát nem lehet nulla. Ezért csupán a

$$-1 \leq \frac{2}{2+\sin x} \leq 1, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{2}{2+\sin x} \geq -1 \quad \text{és} \quad \frac{2}{2+\sin x} \leq 1 \right)$$

egyenlőtlenségrendszert kell megoldani. Mivel $2 + \sin x > 0$ minden valós számra, ezért mindkét egyenlőtlenség beszorozható $(2 + \sin x)$-szel, s így a

$$2 \geq -2 - \sin x \quad \text{és} \quad 2 \leq 2 + \sin x,$$

illetve a

$$\sin x \geq -4 \quad \text{és} \quad \sin x \geq 0$$

egyenlőtlenségeket kapjuk, amelyek közül az első mindig teljesül, a második megoldáshalmaza pedig minden olyan intervallum uniója, ahol az $y = \sin x$ függvénygörbe nem az x-tengely alatt van, tehát

$$D_f = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

12. $f(x) = \sqrt{3x} + \log(4 - x) + \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-2}}$

Megoldás. Vegyük figyelembe mindhárom összeadandó értelmezési tartományát és keressük meg ezek metszetét. Kikötéseink a következők:

$$3x \geq 0 \quad \text{és} \quad 4 - x > 0 \quad \text{és} \quad x - 2 \neq 0,$$

$$\text{illetve} \quad x \geq 0 \quad \text{és} \quad x < 4 \quad \text{és} \quad x \neq 2.$$

A keresett értelmezési tartomány így $D_f = [0, 2) \cup (2, 4)$.

13. $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{\operatorname{arcsin} \frac{1}{x^2+1}} + \operatorname{arctg}\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)$

Megoldás. Vegyük figyelembe, hogy az exponenciális függvény kitevőjében levő tört nevezője nem lehet nulla, azaz $x+1 \neq 0$, illetve $x \neq -1$ kell, hogy teljesüljön. A négyzetgyök alatti kifejezés nem lehet negatív, tehát kikötjük, hogy

$$\operatorname{arcsin} \frac{1}{x^2+1} \geq 0$$

teljesüljön, ami akkor és csak akkor lehetséges, ha $0 \leq \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$ teljesül. Mivel $x^2+1 > 0$, ezért a kapott egyenletrendszer ekvivalens a $0 \leq 1 \leq x^2+1$ egyenletrendszerrel, amelynek megoldáshalmaza a valós számok halmaza. Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény minden valós számra értelmezett, tehát itt nincs kikötés, a logaritmusfüggvény viszont csak szigorúan pozitív értékekre értelmezett, és az x^2+1 kifejezés teljesíti ezt a feltételt. Összegezve a fenti feltételek mindegyikét azt kapjuk, hogy az adott függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, azaz

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty).$$

14. $f(x) = \left(x^2 - x - 2\right)^{x^2+1}$

Megoldás. Az exponenciális függvény alapja csak 1-től különböző pozitív valós szám lehet, így teljesülnie kell az

$$x^2 - x - 2 > 0 \quad \text{és} \quad x^2 - x - 2 \neq 1,$$

illetve az

$$(x-2)(x+1) > 0 \quad \text{és} \quad x^2 - x - 3 \neq 0$$

feltételeknek. Az első egyenlőtlenség megoldása az $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ intervallum, a második megoldása pedig: $x \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Ezért a megadott függvény értelmezési tartománya

$$D_f = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1\right) \cup \left(2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty\right).$$

15. $f(x) = \log_{3x-3}\left(4 - x^2\right)$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak pozitív értékekre értelmezett, alapja pedig csak 1-től különböző pozitív valós szám lehet, ezért kikötéseink most:

$$3x - 3 > 0 \quad \text{és} \quad 3x - 3 \neq 1 \quad \text{és} \quad 4 - x^2 > 0.$$

Mivel a fenti egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát az $x > 1$, az $x \neq \dfrac{4}{3}$, valamint a $-2 < x < 2$ tulajdonságok egyidőben történő megvalósulása adja meg, ezért az f függvény értelmezési tartománya

$$D_f = \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, 2\right).$$

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, nullahelyeit, majd vizsgáljuk ki az előjelüket, azaz határozzuk meg mely intervallumokon pozitívak és mely intervallumokon negatívak.

16. $f(x) = 6x - 3$

Megoldás. Mivel f lineáris függvény, ezért $D_f = \mathbf{R}$. A függvény nullahelye az $f(x) = 0$ függvény megoldása, ebben az esetben a $6x - 3 = 0$ egyenlet gyöke, azaz $x = \frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy az f függvény görbéje az $N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pontban metszi az x-tengelyt. Az f függvény akkor és csakis akkor pozitív, ha $f(x) > 0$, azaz $6x - 3 > 0$, tehát $x > \frac{1}{2}$ esetén. Az f függvény akkor és csakis akkor negatív, ha $f(x) < 0$, azaz $6x - 3 < 0$, tehát $x < \frac{1}{2}$ esetén. Ezeket a tulajdonságokat táblázatban is összefoglalhatjuk.

D_f	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$f(x)$	$-$	$+$

Az f függvény pozitív az $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ intervallumon, és negatív a $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ intervallumon.

17. $f(x) = 25 - x^2$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, mert f másodfokú függvény. $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $25 - x^2 = 0$, azaz $x = -5$ vagy $x = 5$ esetén, tehát a függvény grafikonja $N_1(-5, 0)$ és $N_2(5, 0)$ pontokban metszi az x-tengelyt. Felhasználva, hogy a függvény $f(x) = (5 - x)(5 + x)$ alakban is felírható, az előjellel kapcsolatos tulajdonságokat táblázatban foglaljuk össze.

D_f	$(-\infty, -5)$	$(-5, 5)$	$(5, \infty)$
$5 - x$	$+$	$+$	$-$
$5 + x$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Megállapíthatjuk, hogy az f függvény pozitív a $(-5, 5)$ intervallumon, és negatív a $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$ intervallumon.

18. $f(x) = x^3 + x^2 + 2x$

Megoldás. f polinomfüggvény, tehát az értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$. $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(x^2 + x + 2) = 0$, azaz csupán $x = 0$ esetén, mert $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$. A függvény grafikonja tehát csak az $N(0, 0)$ pontban metszi az x-tengelyt. Az f függvény előjele így csak x-től függ, vagyis $f(x) > 0$, ha $x \in (0, \infty)$, és $f(x) < 0$, ha $x \in (-\infty, 0)$.

19. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 9}$

Megoldás. f racionális törtfüggvény, így a nevező nem lehet nulla, azaz $x^2 - 9 \neq 0$, ami azt jelenti, hogy $x \neq 3$ és $x \neq -3$. Az értelmezési tartomány ennek alapján $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, illetve intervallumos alakban $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha a számláló nulla, vagyis $x(x - 1)(x - 2) = 0$. A kapott egyenlet megoldásai $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ és $x_3 = 2$, tehát a függvény grafikonja az $N_1(0, 0)$, $N_2(1, 0)$ és $N_3(2, 0)$ pontokban metszi az x-tengelyt. Végezzük táblázattal az előjel vizsgálatát.

D_f	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-3x+2	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
x^2-9	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Megállapíthatjuk, hogy
$f(x)>0$, ha $x\in(-3,0)\cup(1,2)\cup(3,\infty)$ és
$f(x)<0$, ha $x\in(-\infty,-3)\cup(0,1)\cup(2,3)$.

20. $f(x)=2^x-4$

Megoldás. Az exponenciális függvény minden valós számra értelmezett, ezért az értelmezési tartomány $D_f=\mathbf{R}$. A függvény nullahelyét az $f(x)=0$ egyenletből számíthatjuk ki. $2^x-4=0$ akkor és csakis akkor, ha $2^x=2^2$, amelyből $x=2$, vagyis az f függvény grafikonja egyetlen pontban metszi át az x-tengelyt, ez pedig $N(2,0)$. A függvény előjelének kivizsgálásához exponenciális egyenlőtlenségeket kell megoldani. $f(x)>0$ akkor és csakis akkor, ha $2^x-4>0$, azaz $2^x>2^2$, amelyből következik, hogy $x>2$. $f(x)<0$ akkor és csakis akkor, ha $2^x<2^2$, ahonnan $x<2$. Összefoglalva,
az f függvény pozitív, ha $x\in(2,\infty)$ és
az f függvény negatív, ha $x\in(-\infty,2)$.

21. $f(x)=\dfrac{15-3x}{\sqrt{x-6}}$

Megoldás. A nevező nem lehet nulla és a gyök alatti kifejezés nem lehet negatív, ezért $x-6>0$ esetén lesz csak értelmezett a függvény, ami azt jelenti, hogy az értelmezési tartomány $D_f=(6,\infty)$. $f(x)=0$ akkor és csakis akkor, ha $15-3x=0$, azaz $x=5$ esetében, de mivel $5\notin D_f$, ezért a függvénynek nincs nullahelye. Az előjel kivizsgálásánál vegyük észre, hogy $\sqrt{x-6}>0$ az értelmezési tartomány minden pontjára, tehát a függvény előjele csak a számláló előjelétől függ. Ezért $f(x)>0$ akkor és csakis akkor, ha $15-3x>0$, vagyis $x<5$ esetén, ami nem lehetséges, mert ez az intervallum nincs benne az értelmezési tartományban. $f(x)<0$ akkor és csakis akkor, ha $15-3x<0$, vagyis $x>5$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az f függvény a teljes értelmezési tartományon negatív.

22. $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak pozitív értékekre értelmezett, ezért az egyik kikötésünk az, hogy $x>0$. A nevező nem lehet nulla, ezért a másik kikötésünk az $\ln x\neq 1$, vagyis $x\neq e$. Ezért a függvény értelmezési tartománya $D_f=(0,e)\cup(e,\infty)$. $f(x)=0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x=0$, ez pedig $x=1$ esetén teljesül, tehát a függvénygrafikon az $N(1,0)$ pontban metszi át az abszcissza tengelyt. Foglaljuk táblázatba a függvény előjelének kivizsgálását.

D_f	$(0,1)$	$(1,e)$	(e,∞)
$\ln x$	$-$	$+$	$+$
$1-\ln x$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

A táblázatból megállapíthatjuk, hogy
$f(x)>0$, ha $x\in(1,e)$, és
$f(x)<0$, ha $x\in(0,1)\cup(e,\infty)$.

23. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+2}{x-3}$

Megoldás. Az f függvény akkor és csakis akkor értelmezett, ha $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$. Készítsük el a kapott egyenlőtlenség megoldásának táblázatát.

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x+2}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

A táblázatból megállapíthatjuk, hogy a függvény értelmezési tartománya

$$D_f = (-\infty,-2) \cup (3,\infty).$$

$f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x+2}{x-3} = 1$, azaz $x+2 = x-3$ esetén, e ennek az egyenletnek nincs megoldása, így a függvénynek nincs nullahelye. $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $0 < \dfrac{x+2}{x-3} < 1$, azaz akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x+2-x+3}{x-3} < 0$. A kapott egyenlőtlenség megoldása $\dfrac{5}{x-3} < 0$, illetve $x-3 < 0$ megoldásával ekvivalens, ami azt jelenti, hogy az f függvény pozitív $x < 3$ esetén, tehát a $(-\infty,-2)$ intervallumon. $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x+2}{x-3} > 1$, azaz akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{5}{x-3} > 0$. A kapott egyenlőtlenség megoldása $x-3 > 0$ megoldásával ekvivalens, ami azt jelenti, hogy az f függvény negatív a $(3,\infty)$ intervallumon.

24. $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$

Megoldás. Mivel az exponenciális függvény kitevőjében levő nevező nem lehet nulla, ezért $x \neq 0$, s így $D_f = R \setminus \{0\} = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.
$f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x-2 = 0$, tehát $x = 2$ a függvény nullahelye. Ez azt jelenti, hogy a függvénygrafikon az $N(2,0)$ pontban metszi az x-tengelyt. Mivel az exponenciális függvény mindig pozitív, ezért $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x-2 > 0$, és $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x-2 < 0$. Az f függvény tehát pozitív $x > 2$-re, azaz $x \in (2,\infty)$ esetén, és negatív $x < 2$-re, azaz $x \in (-\infty,2)$ esetén.

25. $f(x) = \cos 2x - \sin x$

Megoldás. Az f függvényben szereplő két trigonometrikus függvény minden valós számra értelmezett, tehát az f függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$.
Alkalmazva a trigonometriai azonosságokat átalakíthatjuk az f függvényt:

$$f(x) = \cos 2x - \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sin x.$$

Ekkor $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Bevezetve a $\sin x = t$ helyettesítést az egyenlet a $2t^2 + t - 1 = 0$ másodfokú egyenletre vezetődik vissza, amelynek megoldásai $t_1 = \dfrac{1}{2}$ és $t_2 = -1$. Visszahelyettesítve az eredeti változót a

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sin x = -1$$

egyenleteket kapjuk, amelyek megoldásai

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Mivel az f függvény

$$f(x) = -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 1)$$

alakban is felírható és $\sin x + 1 \geq 0$, ezért $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sin x - \frac{1}{2} < 0$, illetve $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sin x - \frac{1}{2} > 0$.
Összegezve a fentieket megállapíthatjuk, hogy az f függvény pozitív, ha

$$x \in \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \bigcup \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \bigcup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right),$$

illetve az f függvény negatív, ha $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$.

3.1.2. Valós függvények tulajdonságai

A következőkben felsoroljuk azokat a legegyszerűbb fogalmakat, amelyek a függvények vizsgálata során leggyakrabban előfordulnak.

3.1. Definíció. *Az f függvényt felülről (alulról) korlátosnak nevezzük, ha van olyan K (k) szám, hogy minden $x \in D_f$ pontra $f(x) < K$ ($k < f(x)$). Az f függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, ekkor*

$$|f(x)| \leq \max\{|k|, |K|\}, \quad \text{azaz} \quad k \leq f(x) \leq K.$$

Azt mondjuk, hogy K az f függvény egy felső, k pedig az f függvény egy alsó korlátja.

Fontos kihangsúlyozni, hogy ha a függvénynek van egy felső korlátja vagy egy alsó korlátja, akkor ezekből végtelen sok is van. Tehát a felső és alsó korlát fogalma nem egyértelmű. Lehet definiálni korlátos függvény legkisebb felső korlátját, mint a függvény szuprémumát, vagy korlátos függvény legnagyobb alsó korlátját, mint a függvény infimmumát, de a korlátosság szempontjából ezek nem a legfontosabb fogalmak.

3.12. Példa. *a)* Az $f(x) = -x^2 + 2$ függvény felülről korlátos, egy felső korlátja a 2, tehát a függvény grafikonja az $y = 2$ egyenes alatt helyezkedik el.

b) Az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény alulról korlátos, egy alsó korlátja a 0, tehát a függvény grafikonja az $y = 0$ egyenes felett helyezkedik el.

c) Az $f(x) = \cos x$ függvény korlátos, egy felső korlátja az 1, egy alsó korlátja a -1, tehát a függvény grafikonja az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenesek között helyezkedik el.

d) Az $f(x) = x^3$ függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos.

3.2. Definíció. *Az f függvényt szigorúan monoton növekvőnek (csökkenőnek) nevezzük, ha az értelmezési tartomány bármely két olyan pontjára, amelyekre $x_1 < x_2$, az*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

reláció teljesül. Az f függvényt monoton nemcsökkenőnek (nemnövekvőnek) mondjuk, ha $x_1 < x_2$ esetén az teljesül, hogy

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

A szigorúan monoton növekvő, szigorúan monoton csökkenő, monoton nemcsökkenő és monoton nemnövekvő függvényeket közös néven monoton függvényeknek nevezzük. A szigorúan monoton növekvő és szigorúan monoton csökkenő függvényekre azt mondjuk, hogy szigorúan monotonak.

3.13. Példa. *a)* Az $f(x) = 2^{-x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő.

b) Az $f(x) = \ln x$ függvény szigorúan monoton növekvő.

c) Az $f(x) = 2$ függvény monoton nemcsökkenő és monoton nemnövekvő is.

A monotonitás definiálható az értelmezési tartomány valamely részintervallumán is. Ekkor a szóban forgó intervallumon monoton függvényről beszélünk.

3.14. Példa. *a)* Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény a $(-\infty, 0)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $(0, \infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő, de a teljes értelmezési tartományon vizsgálva nem monoton.

b) Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény a $(-\infty, 1)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $(1, \infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton növekvő, de a teljes értelmezési tartományon vizsgálva nem monoton.

3.3. Definíció. *Legyen x_0 az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az f függvénynek az x_0 pontban helyi (vagy lokális) maximuma (minimuma) van, ha megadható az x_0 pontnak olyan környezete, hogy az ebbe eső $x \in D_f$, de $x \neq x_0$ pontokra igaz, hogy*

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)) .$$

Azt az x_0 pontot, ahol az f függvény eléri helyi maximumát minimumát, az *f függvény helyi maximuma (minimuma) helyének* nevezzük. Az $(x_0, f(x_0))$ pont az $y = f(x)$ *függvénygörbe helyi maximumpontja minimumpontja*. A helyi maximumhelyet és minimumhelyet egy szóval *helyi szélsőértékhelynek* nevezzük, a helyi maximumpont és minimumpont közös neve pedig helyi *szélsőértékpont*.

3.15. Példa. *a)* Az $f(x) = x^2 + 2$ függvénynek az $x = 0$ pontban helyi minimuma van, amelynek értéke $f_{min}(0) = 2$.

b) Az $f(x) = -x^2 + 2x$ függvénynek az $x = 1$ pontban helyi maximuma van, amelynek értéke $f_{max}(1) = 1$.

c) Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvénynek nincs helyi szélsőértéke.

Az olyan függvények esetében vizsgálható a függvénygörbe alakja a konvexitás szempontjából, amelyek értelmezési tartományának van olyan részhalmaza, amely intervallum.

3.4. Definíció. *Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett f függvényt konvexnek (konkávnak) nevezzük, ha minden $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ esetén*

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \left(f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \right) .$$

A fenti definíció szemléletesen a következőképpen fogalmazható meg: egy függvénygörbét konvexnek (konkávnak) nevezünk, ha bármely ívének minden pontja a végpontok kivételével a végpontok által meghatározott húr alatt (felett) van. A konvex görbeívre tehát az jellemző, hogy bármely pontjához húzott érintője fölött halad, míg a konkáv görbeívre az, hogy bármely pontjához húzott érintője alatt halad.
A fenti elnevezések akkor lennének pontosak, ha azt is hozzátennénk, hogy a függvény "felülről nézve" konvex, illetve konkáv, de mi mindig ilyen értelemben használjuk őket.

3.5. Definíció. *Egy függvénynek az x_0 pontban inflexiós (vagy áthajlási) pontja van, ha az x_0 pontnak van olyan jobb és bal oldali környezete, hogy az egyikben a függvény szigorúan konvex, a másikban szigorúan konkáv, vagy fordítva.*

3.16. Példa. Az $f(x) = x^3$ függvény a $(-\infty, 0)$ intervallumon konkáv, a $(0, \infty)$ intervallumon konvex, az $x = 0$ pontban pedig inflexiós pontja van és $f_{inf}(0) = 0$.

3.6. Definíció. *Az f függvényt, amelynek értelmezési tartománya szimmetrikus az origóra, páros függvénynek nevezzük, ha bármely $x \in D_f$ pontra $f(-x) = f(x)$, és páratlan függvénynek, ha bármely $x \in D_f$ pontra $f(-x) = -f(x)$.*

A definícióból következik, hogy a páros függvények grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y-tengelyre, a páratlan függvények grafikonja pedig középpontosan szimmetrikus az origóra.

3.17. Példa. Az $f(x) = x^2 + |x|$ függvény páros, mert

$$f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x).$$

3.18. Példa. Az $f(x) = x^3 + x$ függvény páratlan, mert

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x).$$

3.19. Példa. Ha tudjuk, hogy a trigonometrikus függvények közül csak az $y = \cos x$ páros, a többi páratlan, akkor megállapíthatjuk, hogy az $f(x) = \sin x + \cos x$ függvény se nem páros, se nem páratlan, mivel

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq \pm f(x).$$

3.20. Példa. Az $f(x) = \log x$ se nem páros, se nem páratlan, mert az értelmezési tartománya nem szimmetrikus az origóra.

3.7. Definíció. *Az f függvény periodikus, ha létezik olyan ω pozitív valós szám, amelyre teljesül a következő két feltétel:*

1. minden $x \in D_f$ esetén következik, hogy $(x + k\omega) \in D_f$, ahol $k \in \mathbf{Z}$;

2. minden $x \in D_f$ esetén $f(x + \omega) = f(x)$. Ekkor ω-t az f függvény periódusának nevezzük.

Természetesen, ha ω periódus, akkor ennek bármely pozitív egész számszorosa is periódus. A függvény lehető legkisebb periódusát a függvény *alapperiódusának* nevezzük és ω_0-val jelöljük.

3.21. Példa. A trigonometrikus függvények periodikusak. Közülük az $f(x) = \sin x$ és $f(x) = \cos x$ függvények alapperiódusa $\omega_0 = 2\pi$. Ez azt jelenti, hogy $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, azaz, hogy $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbf{Z}$, illetve hogy $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbf{Z}$. Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ és az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvények alapperiódusa $\omega_0 = \pi$. Ebből azt tudjuk, hogy $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $k \in \mathbf{Z}$, és $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.22. Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény nem periodikus, mert nem találunk olyan ω pozitív valós számot, hogy $f(x+\omega) = f(x)$, vagyis $\dfrac{1}{x+\omega} = \dfrac{1}{x}$ teljesüljön, hiszen akkor $x+\omega = x$ kellene, hogy igaz legyen minden valós $x \neq 0$ értékre, amely csak $\omega = 0$ esetben valósul meg.

3.23. Példa. Vizsgáljuk most ki az $f(x) = \sin 3x$ függvény periodikusságát. Mivel általános esetben tudjuk, hogy az f függvény periodikusságához egy olyan $\omega > 0$ számot keresünk, amelyre $f(x + \omega) = f(x)$ igaz, és ebben az esetben tudjuk, hogy az $y = \sin x$ függvény periodikus és 2π az alapperiódusa, ezért most a

$$\sin 3(x + \omega) = \sin(3x + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Innen $3(x + \omega) = 3x + 2k\pi$ akkor és csakis akkor, ha $3\omega = 2k\pi$, vagyis

$$\omega = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Az alapperiódust a legkisebb pozitív egész k számra kapjuk, tehát $k = 1$ esetén, s így az f függvényről megállapítható, hogy periodikus, alapperiódusa pedig $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{3}$.

3.24. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$ függvény nem periodikus. E célból tegyük fel, hogy az f függvény periodikus ω periódussal, azaz teljesül, hogy

$$\operatorname{tg}\sqrt{x + \omega} = \operatorname{tg}(\sqrt{x} + k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ebből $\sqrt{x + \omega} = \sqrt{x} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ahonnan négyzetre emeléssel azt kapjuk, hogy

$$x + \omega = x + 2k\pi\sqrt{x} + k^2\pi^2, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ekkor

$$\omega = 2k\pi\sqrt{x} + k^2\pi^2 \notin \mathbf{R}^+, \quad k \in \mathbf{Z},$$

mivel az x változó is szerepel a kifejezésben. Ezért az f függvény egy nem periodikus trigonometrikus függvény.

FELADATOK.

Vizsgáljuk ki az alábbi függvények paritását.

1. $f(x) = x\sqrt{x^2}$

Megoldás. Mivel

$$f(-x) = -x\sqrt{(-x)^2} = -x\sqrt{x^2} = -f(x),$$

az adott függvény páratlan.

2. $f(x) = x^4 + 5x^2 + 6 + 3\cos x$

Megoldás. Mivel

$$f(-x) = (-x)^4 + 5(-x)^2 + 6 + 3\cos(-x) = x^4 + 5x^2 + 6 + 3\cos x = f(x),$$

az adott függvény páros.

3. $f(x) = \sin(\sin x)$

Megoldás. Mivel

$$f(-x) = \sin(\sin(-x)) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -f(x),$$

az adott függvény tehát páratlan.

4. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Megoldás. A függvény se nem páros, se nem páratlan, hiszen

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 + (-x) + 1 = -x^3 + x^2 - x + 1 \neq \pm f(x).$$

5. $f(x) = \dfrac{\cos 5x}{x^3 + x}$

Megoldás. A függvény páratlan, mert $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ és

$$f(-x) = \frac{\cos 5(-x)}{(-x)^3 + (-x)} = \frac{\cos 5x}{-x^3 - x} = -\frac{\cos 5x}{x^3 + x} = -f(x).$$

6. $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$

Megoldás. Mivel

$$f(-x) = \frac{3^{(-x)} - 3^{-(-x)}}{2} = \frac{3^{-x} - 3^x}{2} = -\frac{3^x - 3^{-x}}{2} = -f(x),$$

ezért a függvény páratlan.

7. $f(x) = \sqrt{1 - 3x + 2x^2} - \sqrt{1 + 3x + 2x^2}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy $D_f = (-\infty, -1) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$ és

$$f(-x) = \sqrt{1 - 3(-x) + 2(-x)^2} - \sqrt{1 + 3(-x) + 2(-x)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 3x + 2x^2} - \sqrt{1 - 3x + 2x^2} = -\left(\sqrt{1 + 3x + 2x^2} - \sqrt{1 - 3x + 2x^2}\right) = -f(x),$$

ezért a függvény páratlan.

8. $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}$

Megoldás. Mivel

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x+2)^2} + \sqrt[3]{(-x-2)^2} = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^2} = f(x),$$

a függvény páros.

9. $f(x) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Megoldás. A függvény páratlan, mert

$$f(-x) = \log_a\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) = \log_a\left(\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) =$$

$$= \log_a\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{-1} = -\log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = -f(x).$$

10. $f(x) = \ln\dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$

Megoldás. A függvény páros, mert

$$f(-x) = \ln\frac{2+\cos(-x)}{2-\cos(-x)} = \ln\frac{2+\cos x}{2-\cos x} = f(x).$$

Vizsgáljuk ki az alábbi függvények periodikusságát.

11. $f(x) = \sin^2 x$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ trigonometriai azonosságot, s így valójában az $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ függvény periodikusságát kell kivizsgálni. Olyan ω pozitív valós számot keresünk, hogy teljesüljön az $f(x+\omega) = f(x)$ egyenlőség, illetve ha felhasználjuk az $y = \cos x$ periodikusságát, akkor igaz legyen, hogy

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(x+\omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Innen

$$\cos 2(x+\omega) = \cos(2x+2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

vagyis

$$2x + 2\omega = 2x + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ebből adódik, hogy az f függvény periódusa $\omega = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, az alapperiódusa pedig $k = 1$-re $\omega_0 = \pi$.

12. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

Megoldás. Olyan ω pozitív valós számot keresünk, amelyre

$$\sin\frac{1}{x+\omega} = \sin\left(\frac{1}{x} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ebből

$$\frac{1}{x+\omega} = \frac{1+2k\pi x}{x}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

vagyis

$$x = (x+\omega)(1+2k\pi x), \quad \text{illetve} \quad x = x + 2k\pi x^2 + \omega + 2k\pi\omega x, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ahonnan

$$\omega = \frac{-2k\pi x^2}{1+2k\pi x} \notin \mathbf{R}^+,$$

tehát ez a függvény nem periodikus.

13. $f(x) = 3\operatorname{ctg}\pi x$

Megoldás. Mivel

$$3\operatorname{ctg}\pi(x+\omega) = 3\operatorname{ctg}(\pi x + k\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

kell legyen, ezért

$$\pi x + \pi\omega = \pi x + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ahonnan $\omega = k$, $k \in \mathbf{Z}$, a periódus, és $\omega_0 = 1$ az alapperiódus.

14. $f(x) = 2\sin\dfrac{\pi x}{2} + 3\sin\dfrac{\pi x}{3}$

Megoldás. Mivel most két összeadandónk van, mindkettőnek keressük a periódusát, majd a kapott periódusok legkisebb közös többszöröse lesz az f összegfüggvény periódusa. Először a

$$2\sin\frac{\pi}{2}(x+\omega) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z},$$

egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi\omega}{2} = \frac{\pi x}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ahonnan $\omega = 4k$, $k \in \mathbf{Z}$. Másodszor a

$$3\sin\frac{\pi}{3}(x+\omega) = 3\sin\left(\frac{\pi x}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z},$$

egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi\omega}{3} = \frac{\pi x}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ahonnan $\omega = 6k$, $k \in \mathbf{Z}$. Mivel $LKT(4k, 6k) = 12k$, az adott f függvény periódusa $\omega = 12k$, $k \in \mathbf{Z}$, alapperiódusa pedig $\omega_0 = 12$.

15. $f(x) = \cos\dfrac{x-1}{\pi}$

Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy van-e olyan pozitív valós ω, amelyre teljesül a

$$\cos\frac{x+\omega-1}{\pi} = \cos\left(\frac{x-1}{\pi} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}$$

egyenlőség. Innen

$$\frac{x-1}{\pi} + \frac{\omega}{\pi} = \frac{x-1}{\pi} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

kell legyen, ahonnan $\omega = 2k\pi^2$, $k \in \mathbf{Z}$ a függvény periódusa, $\omega_0 = 2\pi^2$ pedig az alapperiódus.

3.1.3. Műveletek függvényekkel, az inverz függvény

3.8. Definíció. *Az f és g valós függvények összegén, különbségén, szorzatán, hányadosán rendre azt az F, G, H, R függvényt értjük, amely azokban és csak azokban a pontokban értelmezett, amelyekben f és g is értelmezett (kivéve az R függvényt, amely $g(x) = 0$ esetén nem értelmezett), és minden ilyen pontban:*

$$F(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$G(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$H(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$R(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

3.9. Definíció. *Az f és g valós függvények összetételén (vagy kompozícióján) azt a F függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya a g függvény értelmezési tartományának azon x pontjaiból áll, amelyekre a $g(x)$ függvényérték hozzátartozik az f függvény értelmezési tartományához, és minden ilyen pontban*

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

3.25. Példa. Ha $f(x) = x + 12$, $x \in \mathbf{R}$ és $g(x) = x^2 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$, akkor

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - \sqrt{x}) = x^2 - \sqrt{x} + 12, \quad x \geq 0,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+12) = (x+12)^2 - \sqrt{x+12}, \quad x \geq -12.$$

3.26. Példa. Bontsuk fel belső és külső függvényekre a $F(x) = \sqrt[3]{1 + 2x + 4x^2}$ függvényt. Ha $g(x) = 1 + 2x + 4x^2$ és $f(x) = \sqrt[3]{x}$, akkor $f(g(x)) = \sqrt[3]{1 + 2x + 4x^2}$. Viszont, ha $g_1(x) = x + 2x^2$ és $f_1(x) = \sqrt[3]{1 + 2x}$, akkor $f_1(g_1(x)) = \sqrt[3]{1 + 2(x + 2x^2)} = \sqrt[3]{1 + 2x + 4x^2}$.

3.10. Definíció. *Legyen az f valós függvény által létesített leképezés kölcsönösen egyértelmű (bijektív). Az f függvény inverz függvényén értjük azt az f^{-1} függvényt, amelynek értelmezési tartománya az f értékkészlete, s a hozzárendelési törvénye a következő: egy x_0 értékhez olyan $f^{-1}(x_0)$ értéket rendel, amely helyen az f függvény az x_0 értéket vette fel, azaz $f(f^{-1}(x_0)) = x_0$.*

Szigorúan monoton függvénynek mindig létezik inverze, ugyanis ekkor a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű.
Ha az f invertálható függvény grafikonja megrajzolható, akkor az f^{-1} grafikonja is, és ez az f függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben.

3.27. Példa. Az $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+5}$ függvény f^{-1} inverzfüggvénye az $x = \dfrac{3f^{-1}(x)+2}{f^{-1}(x)+5}$ összefüggésből $f^{-1}(x) = \dfrac{2-5x}{x-3}$, ahol $D_f = R_{f^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{-5\}$ és $R_f = D_{f^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

3.28. Példa. Legyen $f(x) = \log(x-1)+3$ adott függvény, ahol $D_f = (1,\infty)$ és $R_f = \mathbf{R}$. Az f függvény f^{-1} inverzére az $f(f^{-1}(x)) = x$ tulajdonság alapján érvényes, hogy

$$\log(f^{-1}(x)-1)+3 = x, \quad \text{azaz} \quad f^{-1}(x) = 10^{x-3}+1,$$

ahol $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}$ és $R_{f^{-1}} = (1,\infty)$.

FELADATOK.

Határozzuk meg a következő függvények inverzeit.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Megoldás. Az $y = x^2 - 4x + 3$ függvénygrafikonról megállapítható, hogy az f függvény bijektív a $(-\infty, 2]$, illetve a $[2,\infty)$ intervallumon, ezért ezek bármelyikén kereshetünk inverzfüggvényt. Ha $y = x^2 - 4x + 3$, akkor az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után $x = y^2 - 4y + 3$, illetve $y^2 - 4y + 3 - x = 0$, innen pedig

$$y_1 = 2 + \sqrt{1+x} \quad \text{és} \quad y_2 = 2 - \sqrt{1+x}.$$

Ha az $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény az f függvény leszűkítése az a $(-\infty, 2]$ intervallumra, vagyis $D_{f_1} = (-\infty, 2]$, az $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény pedig az f függvény leszűkítése az a $[2,\infty)$ intervallumra, vagyis $D_{f_2} = [2,\infty)$, akkor

$$f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{1+x}, \quad \text{és} \quad f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{1+x},$$

és $R_f = [-1,\infty)$ miatt mindkét függvény értelmezési tartománya

$$D_{f_1^{-1}} = D_{f_2^{-1}} = [-1,\infty).$$

2. $f(x) = 2 \cdot 3^{x-2} - 1$

Megoldás. Írjuk fel a függvényt $y = 2 \cdot 3^{x-2} - 1$ alakban. Ekkor az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után $x = 2 \cdot 3^{y-2} - 1$ írható fel, ahonnan

$$\frac{x+1}{2} = 3^{y-2}, \quad \text{illetve} \quad y - 2 = \log_3 \frac{x+1}{2}$$

egyenlőségekhez jutunk, ahonnan az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = 2 + \log_3 \dfrac{x+1}{2}$.

3. $f(x) = 3 + \ln(2x+1)$

Megoldás. Mivel most $y = 3 + \ln(2x+1)$, az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után felírható, hogy $x = 3 + \ln(2y+1)$. Ha ebből kifejezzük az y függő változót, akkor ebből

$$x - 3 = \ln(2y+1), \quad \text{illetve} \quad e^{x-3} = 2y+1,$$

ahonnan megkapjuk, hogy az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{x-3} - 1\right)$.

4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Megoldás. Végezzük el az $x \longleftrightarrow y$ változócserét az $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ egyenletben. Ekkor az $x = \dfrac{y+1}{y-1}$ egyenletet kapjuk, ahonnan ki kell fejeznünk az y függő változót. Az átalakítás során azt kapjuk, hogy $x(y-1) = y+1$, illetve $y(x-1) = x+1$, ahonnan az inverz függvény $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
Vegyük észre, hogy az f függvény most önmagának inverze, ami azt jelenti, hogy a függvény grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyeneshez viszonyítva.

5. $f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$

Megoldás. Vezessük be az $y = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$ egyenletbe az $x \longleftrightarrow y$ változócserét. Ekkor az $x = \dfrac{2^y - 2^{-y}}{2}$ összefüggést kapjuk, amelyből ki kell fejezni a függő y változót. Rendezve az egyenletet adódik, hogy

$$2x = 2^y - \frac{1}{2^y}, \quad \text{illetve} \quad 2x \cdot 2^y = 2^{2y} - 1.$$

Ha a kapott egyenletben bevezetjük a $2^y = t$ helyettesítést, akkor a $t^2 - 2xt - 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelyből

$$t_1 = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{és} \quad t_2 = x - \sqrt{x^2+1},$$

illetve a visszahelyettesítés után

$$2^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{vagy} \quad 2^y = x - \sqrt{x^2+1}.$$

Mivel $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, ezért csak a $2^y = x + \sqrt{x^2+1}$ egyenlőség lehetséges, ahonnan mindkét oldal logaritmálása után kapjuk meg, hogy $f^{-1}(x) = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

6. $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$, $a > 0$, $a \neq 1$

Megoldás. Bővítsük az f függvényt a^x-nel. Így az $y = \dfrac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$ egyenletbe kell bevezetni az $x \longleftrightarrow y$ változócserét, s ekkor $x = \dfrac{a^{2y} - 1}{a^{2y} + 1}$. Kifejezve ebből a függő változót adódik, hogy

$$a^{2y}(x-1) = x+1, \quad \text{illetve} \quad a^{2y} = \frac{x+1}{x-1},$$

amelyből megkaphatjuk, hogy a keresett inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \log_a \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

7. $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

Megoldás. Az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után az $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ egyenletből kapjuk az $x = \ln \dfrac{1+y}{1-y}$ egyenletet, amelyből y-t fejezzük ki. Ekkor

$$e^x(1-y) = 1+y, \quad \text{illetve} \quad y\,(e^x+1) = e^x - 1$$

az ekvivalens egyenlet, ahonnan a keresett inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

8. $f(x) = \log_a \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $a > 0$, $a \neq 1$

Megoldás. Ismételjük meg az előző feladatokból már jól ismert eljárást, azaz vezessük be az $y = \log_a \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ egyenletben az $x \longleftrightarrow y$ változócserét. Ekkor

$$x = \log_a \left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \quad \text{ahonnan} \quad a^x - y = \sqrt{y^2+1}.$$

Négyzetre emelés után adódik, hogy

$$a^{2x} - 2ya^x + y^2 = y^2 + 1, \quad \text{illetve} \quad 2ya^x = a^{2x} - 1,$$

innen pdig következik, hogy az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \dfrac{a^x - a^{-1}}{2}$.

9. $f(x) = \dfrac{2}{1-2\sin 3x}$

Megoldás. Alkalmazzuk az $y = \dfrac{2}{1-2\sin 3x}$ egyenletre az $x \longleftrightarrow y$ változócserét. Ekkor az $x = \dfrac{2}{1-2\sin 3y}$ egyenletet kapjuk, ahonnan az

$$x - 2x\sin 3y = 2, \quad \text{illetve} \quad \frac{x-2}{2x} = \sin 3y$$

ekvivalens egyenleteket kapjuk. A keresett inverzfüggvény tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x-2}{2x}.$$

10. $f(x) = \dfrac{e^{\cos x}-1}{2+e^{\cos x}}$

Megoldás. Ha $y = \dfrac{e^{\cos x}-1}{2+e^{\cos x}}$, akkor az inverzfüggvényt az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után az $x = \dfrac{e^{\cos y}-1}{2+e^{\cos y}}$ egyenletből határozzuk meg. Innen

$$e^{\cos y}(1-x) = 2x+1, \quad \text{azaz} \quad \cos y = \ln\frac{2x+1}{1-x},$$

a keresett inverzfüggvény pedig $f^{-1}(x) = \arccos\left(\ln\dfrac{2x+1}{1-x}\right)$.

11. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x+1|}$ függvényt más alakban, az abszolútérték definíciójának felhasználásával.

Megoldás. Mivel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \quad \text{így} \quad |x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \geq -1, \\ -(x+1), & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

Ezért az f függvény felírható a következő alakban:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+1}, & \text{ha } x \geq -1, \\ \\ \frac{4-x^2}{x+1}, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

12. Írjuk fel az $f(x) = (x+2)\operatorname{sgn}(x+5) - 3x + 2$ függvényt más alakban, az előjel függvény definíciójának felhasználásával.

Megoldás. Mivel

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \quad \text{ezért} \quad f(x) = \begin{cases} (x+2)\cdot 1 - 3x + 2, & \text{ha } x > -5, \\ (x+2)\cdot 0 - 3x + 2, & \text{ha } x = -5, \\ (x+2)\cdot(-1) - 3x + 2, & \text{ha } x < -5, \end{cases}$$

rendezés után pedig

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & \text{ha } x > -5, \\ 2 - 3x, & \text{ha } x = -5, \\ -4x, & \text{ha } x < -5. \end{cases}$$

13. Ha $f(x) = 2x - 1$, akkor határozzuk meg az x és y értékét úgy, hogy $f(f(x)) = 0$ és $f(f(y)) = y$ igaz legyen.

Megoldás. Alkalmazva az összetett függvény szabályát az $f(f(x)) = 0$ feltételből az

$$f(2x-1) = 0 \quad \text{illetve} \quad 2(2x-1) - 1 = 0$$

egyenlet következik, amelynek megoldása $x = \dfrac{3}{4}$.
Az $f(f(y)) = y$ feltételből következik, hogy

$$f(2y-1) = y \quad \text{vagyis} \quad 2(2y-1) = y,$$

így a kapott egyenlet megoldása $y = 1$.

14. Ha $f(x) = 2x + 1$, akkor határozzuk meg a g függvényt az $f(1 + g(x)) = 2x + 3$ összefüggésből.

Megoldás. Ha $f(1 + g(x)) = 2x + 3$, akkor az f függvény definíciója alapján érvényes, hogy $2(1 + g(x)) + 1 = 2x + 3$ azaz $2 + 2g(x) + 1 = 2x + 3$, ahonnan $g(x) = x$.

15. Keressük meg mindazokat az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket, melyekre $f(2010) = 1$ és $f(x)f(y) = f(x-y)$ érvényes legyen minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén.

Megoldás. Vegyük észre, hogy minden $y \in \mathbf{R}$ esetén $f(y) \neq 0$ kell legyen, mert ha létezne olyan $y \in \mathbf{R}$, amelyre $f(y) = 0$ lenne, akkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén érvényes lenne, hogy $f(x) \cdot 0 = f(x-y)$, amely csak $f(x) \equiv 0$ esetén lenne igaz, de ez az $f(2010) = 1$ feltétel miatt nem lehetséges.
Vegyük észre továbbá azt, hogy $x = 2y$ választásával (ami lehetséges, hiszen az $f(x)f(y) = f(x-y)$ egyenlet minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén érvényes)

$$f(2y)f(y) = f(y)$$

adódik, ahonnan $f(2y) = f(x) = 1$, amely függvény eleget tesz az $f(2010) = 1$ feltételnek is. Így a keresett függvény az $f(x) = 1$ konstans függvény.

16. Határozzuk meg mindazokat az f valós függvényeket, melyekre érvényes, hogy $f(xy) = f(x)f(y)$ és $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén.

Megoldás. Ha $y = 0$, akkor az $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ feltételből következik, hogy $f(x) = f(x) + f(0)$, azaz $f(0) = 0$ adódik. Ha az $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ feltételben $y = -x$, akkor

$$f(0) = f(x) + f(-x) - 2x^2.$$

Mivel $f(0) = 0$, így az következik, hogy $f(x) + f(-x) = 2x^2$. Írjuk fel az előbbi lépésben kapott feltételt $f(x \cdot 1) + f(x \cdot (-1)) = 2x^2$ alakban, majd alkalmazzuk rá az $f(xy) = f(x)f(y)$ feltételt. Ekkor

$$f(x) \cdot f(1) + f(x) \cdot f(-1) = 2x^2, \quad \text{ahonnan} \quad f(x)(f(1) + f(-1)) = 2x^2.$$

Ha most az $f(x+y) = f(x)+f(y)+2xy$ feltételben $x = 1$-et és $y = -1$-et választunk, akkor $f(1) + f(-1) = 2$ következik, ahonnan megkapjuk az $f(x) = x^2$ megoldást.

17. Ha $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ és $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, akkor mutassuk meg, hogy

$$f(x \pm y) = f(x)g(y) \pm g(x)f(y).$$

Megoldás. Először mutassuk meg, hogy $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ teljesül.

$$f(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{2(x+y)} - 1}{2e^{x+y}} = \frac{2e^{2x}e^{2y} - 2}{4e^x e^y} =$$

$$= \frac{(e^{2x}e^{2y} - e^{2y} + e^{2x} - 1) + (e^{2x}e^{2y} + e^{2y} - e^{2x} - 1)}{4e^x e^y} =$$

$$= \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} + 1)}{2e^x \cdot 2e^y} + \frac{(e^{2x} + 1)(e^{2y} - 1)}{2e^x \cdot 2e^y} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \cdot \frac{e^{2y} + 1}{2e^y} + \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \cdot \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} =$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = f(x)g(y) + g(x)f(y).$$

Mutassuk meg hasonlóképpen, hogy az $f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$ összefüggés is teljesül.

$$f(x-y)=\frac{e^{x-y}-e^{-x+y}}{2}=\frac{e^{2(x-y)}-1}{2e^{x-y}}=\frac{2e^{2x}e^{-2y}-2}{4e^xe^{-y}}=$$

$$=\frac{(e^{2x}e^{-2y}-e^{2x}+e^{-2y}-1)+(e^{2x}e^{-2y}+e^{2x}-e^{-2y}-1)}{4e^xe^{-y}}=$$

$$=\frac{(e^{2x}-1)\,(e^{-2y}+1)}{2e^x\cdot 2e^{-y}}+\frac{(e^{2x}+1)\,(e^{-2y}-1)}{2e^x\cdot 2e^{-y}}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\cdot\frac{e^{-2y}+1}{2e^{-y}}+\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\cdot\frac{e^{-2y}-1}{2e^{-y}}=$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{-y}-e^y}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{-y}+e^y}{2}=f(x)g(y)-g(x)f(y).$$

18. Legyen $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ adott függvény és $n\in\mathbf{N}$. Határozzuk meg az $f_n(x)$ kifejezést, ha $f_1(x)=f(x)$ és $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$.

Megoldás. Mivel

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\frac{\sqrt{1+3x^2}}{\sqrt{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

$$f_4(x)=f(f_3(x))=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+3x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}}{\frac{\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+3x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

ahonnan most már megsejthetjük, hogy

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\quad n\in\mathbf{N}.$$

Az állítást matematikai indukcióval bizonyítjuk.
1^o $n=1$-re az állítást igaz.
2^o Feltesszük, hogy az állítás igaz $n=k$-ra, azaz $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, $k\in\mathbf{N}$.
3^o Igazoljuk, hogy ekkor az állítás $n=k+1$-re is igaz. Mivel

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

ezzel az állítást igazoltuk.

19. Mutassuk meg, hogy minden valós x esetén $\operatorname{arctg} x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Megoldás. Ha két függvényérték egyenlő, akkor tangenseik is egyenlőek, tehát

$$\operatorname{tg}\,(\operatorname{arctg} x)=\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),\quad x\in\mathbf{R}.$$

Használjuk fel, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ és végezzük el a megfelelő transzformációkat. Ekkor

$$x = \frac{\sin\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}}, \quad \text{innen} \quad x = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}, \quad \text{illetve} \quad x = x$$

következik, amivel az állításunkat igazoltuk.

20. Mutassuk meg, hogy ha $|x| < 1$, akkor $\arcsin x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Megoldás. Vegyük észre, hogy $|x| < 1$ esetén az $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ kifejezés értelmezett. Ha két függvényérték megegyezik, akkor színuszaik is megegyeznek, tehát

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \quad |x| < 1.$$

A $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ trigonometriai azonosság alkalmazásával következik, hogy

$$x = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}}, \quad \text{ebből} \quad x = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}, \quad \text{illetve} \quad x = x$$

következik, amivel az állításunkat igazoltuk.

3.2. Függvények folytonossága

3.2.1. A folytonosság definíciója

3.29. Példa. Tekintsük az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ előjel függvényt ($D_f = \mathbf{R}$) és az $x = 0$ pontot. Tudjuk, hogy $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Vegyünk egy olyan 0-hoz tartó $\{x_n\}$ sorozatot, amelyben $x_n < 0$. Legyen például $x_n = -\dfrac{1}{2^n}$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, a megfelelő függvényértékekből alkotott sorozat határértékére pedig érvényes, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1.$$

Ha $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, akkor most $x_n > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, a megfelelő függvényértékekből alkotott sorozat határértékére pedig igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}(+1) = 1.$$

Vegyünk most olyan 0-hoz tartó sorozatot, amelyben az elemek felváltva pozitív, illetve negatív előjelűek. Legyen például $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$, ahol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, a megfelelő függvényértékekből alkotott sorozat pedig

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad f\left(\frac{1}{2^2}\right) = 1, \quad f\left(-\frac{1}{2^3}\right) = -1, \quad f\left(\frac{1}{2^4}\right) = 1,$$

$$f\left(-\frac{1}{2^5}\right) = -1, \quad \cdots \quad f\left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right) = (-1)^n, \quad \cdots$$

Ez a sorozat nem is konvergens. Megállapíthatjuk tehát, hogy az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvény értéke nullában értelmezett és $f(0) = 0$. Ha az $\{x_n\}$ sorozat balról tart 0-hoz, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1$, ha az $\{x_n\}$ sorozat jobbról tart 0-hoz, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, és ezek a határértékek nem egyeznek meg az $f(0)$ függvényértékkel, a 0-hoz tartó oszcilláló $\{x_n\}$ sorozat esetén pedig $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nem is létezik. Vegyük észre azt is, hogy a szignum függvény grafikonja a 0-ban megszakad.

3.30. Példa. Tekintsük most az $f(x) = \{x\}$ törtrész függvényt és az $x = 1$ pontot ($D_f = \mathbf{R}$), ahol a $\{x\} = x - [x]$, vagyis $[x]$ az x valós szám egész részét, $\{x\}$ pedig az x valós szám törtrészét jelöli. Vegyünk először olyan sorozatot, melynek minden eleme 1-nél kisebb és 1-hez tart. Ilyen például az $x_n = \dfrac{n-1}{n}$. E sorozat elemeihez tartozó függvényértékekből alkotott sorozat

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}, \ \cdots \ f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}, \ \cdots$$

Így a függvényértékekből alkotott sorozat 1-hez tart. Vegyünk most olyan sorozatot, amelynek minden eleme 1-nél nagyobb és ez a sorozat is tartson 1-hez. Ilyen például az $x_n = \dfrac{n+1}{n}$. E sorozat elemeihez tartozó függvényértékekből alkotott sorozat

$$f(2) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}, \ \cdots \ f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \ \cdots$$

Ez a sorozat 0-hoz konvergál. Tudjuk továbbá azt is, hogy a függvényérték $f(1) = \{1\} = = 1 - [1] = 1 - 1 = 0$. Vegyük tehát észre, hogy $f(1) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, ha az $\{x_n\}$ sorozat balról tart 1-hez, és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, ha az $\{x_n\}$ sorozat jobbról tart 1-hez. A törtrész függvény grafikonjáról azt is láthatjuk, hogy a grafikon 1-ben megszakad.

3.31. Példa. Tekintsük most az $f(x) = x^2$ függvényt és az $x = \dfrac{1}{2}$ pontot. Ekkor $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. Vegyünk fel olyan tetszőleges $\{x_n\}$ sorozatot, amely $\dfrac{1}{2}$-hez tart. A megfelelő függvényértékek sorozata $\{x_n^2\}$ és határértékére igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

amely érték megegyezik az $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ függvényértékkel. Ha az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját vizsgáljuk az $x = \frac{1}{2}$ pontban, akkor az előző két példával ellentétben megállapíthatjuk, hogy a függvény grafikonja az $x = \frac{1}{2}$ pontban nem szakad meg.

Másképpen is leírható a függvény $\frac{1}{2}$-ben vizsgált tulajdonsága. Adjunk meg egy tetszőleges pozitív ε számot és legyen $0 < x < 1$. Ekkor

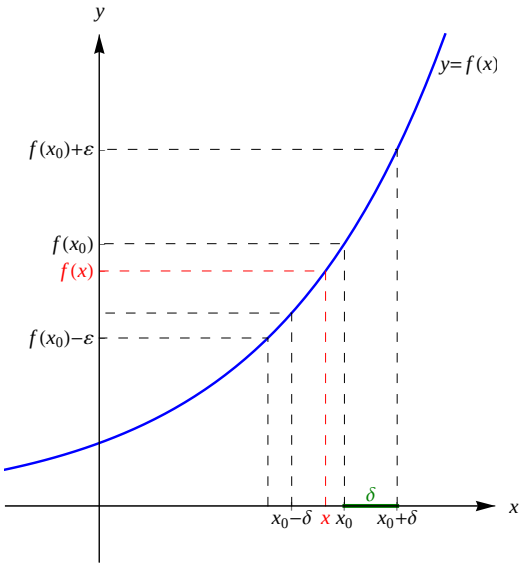
$$\left|x^2 - \frac{1}{4}\right| = \left|x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right| = \left|x + \frac{1}{2}\right| \cdot \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \left(|x| + \frac{1}{2}\right)\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}\left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

ha

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Ezért, ha a δ pozitív számot $\frac{1}{2}$-nél kisebbre választjuk, akkor az $\frac{1}{2}$-nek van olyan δ-sugarú környezete, hogy az ebbe eső x pontokban a függvény értéke az $\frac{1}{4}$ függvényértéktől ε-nál kevesebbel tér el.

Ezen gondolatmenet alapján megfogalmazhatjuk a folytonosság definícióját. Ezért a továbbiakban mindig feltesszük, hogy a függvény, nemcsak a vizsgált pontban, hanem annak valamely környezetében (esetleg csak félkörnyezetében) értelmezve van. A folytonosság pontos fogalmára két definíciót is adunk.



3.11. Definíció. *(Cauchy). Az f függvény folytonos az x_0 pontban, ha bármely pozitív ε-hoz megadható olyan pozitív δ (δ az ε és az x_0 függvénye), hogy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D_f$, és ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, miközben $x_0, x \in D_f$.*

3.12. Definíció. *(Heine). Az f függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha f az x_0 szimmetrikus környezetében értelmezve van, és minden olyan $\{x_n\}$ $(x_n \in D_f)$ sorozatra, amely x_0-hoz tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata az $f(x_0)$ függvényértékhez tart.*

Ezen definíciók azon megfogalmazásnak adnak pontos értelmet, miszerint, ha az x pont elég közel van x_0-hoz, akkor $f(x)$ közel van $f(x_0)$-hoz. Belátható, hogy a Heine-féle és a Cauchy-féle folytonossági definíciók ekvivalensek. Az alábbiakban megadjuk a féloldali folytonosság fogalmát is a Cauchy-féle megfogalmazás szerint. Minden folytonossági definíció megfogalmazható Heine szerint is.

3.13. Definíció. *(Cauchy). Az f függvényt az x_0-ban balról (jobbról) folytonosnak nevezzük, ha f az x_0 megfelelő félkörnyezetében értelmezett és bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan pozitív δ (δ az ε és az x_0 függvénye), hogy $x < x_0$ ($x > x_0$) és $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ($x \in (x_0, x_0 + \delta)$), akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, miközben $x_0, x \in D_f$.*

3.1. Tétel. *Az f függvény egy x_0 pontban akkor és csak akkor folytonos, ha x_0-ban balról is és jobbról is folytonos.*

3.32. Példa. a) Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény minden $x \geq 0$ pontban folytonos.

b) Az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvény az $x = 0$ pontban nem folytonos.

c) Az $x \mapsto \{x\}$, az ún. törtrész-függvény minden egész értékben balról nem folytonos, jobbról viszont folytonos.

3.2.2. Folytonos függvények

3.2. Tétel. *Ha két függvény folytonos az x_0 pontban, akkor összegük, különbségük és szorzatuk is folytonos az x_0 pontban. Hányadosuk is folytonos, ha a nevezőben levő függvény az x_0 pontban nullától különböző.*

3.3. Tétel. *Az $f \circ g$ összetett függvény folytonos az x_0 pontban, ha a g belső függvény folytonos x_0 pontban és az f függvény folytonos $g(x_0)$ pontban.*

A folytonosság pontbeli tulajdonság, bár a függvénynek a vizsgált pont környezetében való értelmezettsége is szükséges az e pontbeli folytonossághoz. Most ezt a pontbeli tulajdonságot intervallumokra is kiterjesztjük.

3.14. Definíció. *Az f függvényt egy nyitott intervallumon folytonosnak nevezzük, ha az intervallum minden pontjában folytonos. Az f függvényt egy zárt intervallumon folytonosnak nevezzük, ha az intervallum minden belső pontjában folytonos, a bal végpontban jobbról és a jobb végpontban balról folytonos.*

3.15. Definíció. *Egy függvényt folytonosnak mondunk, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.*

Amennyiben az értelmezési tartomány több intervallumból áll, akkor minden intervallumon megköveteljük a folytonosságot. Az olyan helyeken, ahol a függvény nincs értelmezve, a folytonosság kérdésének feltevése eleve indokolatlan. Fontos megjegyezni, hogy az elemi függvények folytonosak az értelmezési tartományukon.

3.4. Tétel. *(Bolzano-tétel). Ha a függvény a zárt intervallumon folytonos, és az intervallum két végpontjában az értékei különböző előjelűek, akkor az intervallum belsejében van nullahelye.*

A tétel geometriai jelentése a következő: ha az f függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos és grafikonjának az x-tengely mindkét oldalán van pontja, akkor van a grafikon e két pont közötti ívének az x-tengellyel legalább egy metszéspontja.

A következő tétel a zárt intervallumon folytonos függvények, a későbbi alkalmazások szempontjából nagyon fontos tulajdonságát fogalmazza meg.

3.5. Tétel. *Zárt intervallumon folytonos függvény korlátos ezen az intervallumon.*

A tétel geometriai jelentése: ha az f függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos, akkor grafikonja nem távolodhat el akármilyen messzire az x-tengelytől; megadható olyan, az x-tengellyel párhuzamos sáv, hogy az f függvény grafikonjának az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó szakasza a sávban halad.

Végül következzen két tétel, melyek az inverz függvényekkel kapcsolatosak.

3.6. Tétel. *Legyen az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, ekkor az f^{-1} függvény létezéséhez szükséges és elégséges, hogy az f függvény szigorúan monoton legyen az $[a, b]$ intervallumon.*

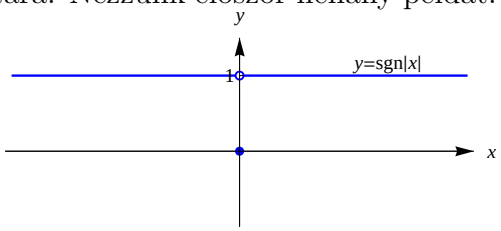
3.7. Tétel. *Ha f az $[a, b]$ intervallumon szigorúan monoton folytonos függvény, inverze, f^{-1} is folytonos azon az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, amelynek végpontjai $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ és $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$.*

3.3. Függvények határértéke

3.3.1. Függvény határértékével kapcsolatos alapfogalmak

Legtöbbször olyan függvényeket vizsgálunk, amelyek egy intervallumon vannak értelmezve. Vannak azonban olyan példák is, ahol a függvények egy pontban vagy nincsenek értelmezve, vagy az adott pontban végtelen nagy értéket vesznek fel. Ilyen esetekben szükség van a függvénynek a pont egy környezetében való vizsgálatára. Nézzünk először néhány példát.

3.33. Példa. Az $f(x) = \operatorname{sgn}|x|$ függvény az origóban nem folytonos, viszont ha $x_n \neq 0$ és $x_n \to 0$, akkor a $\{\operatorname{sgn}|x_n|\}$ sorozat konvergens és 1-hez tart, hiszen minden n-re $\operatorname{sgn}|x_n| = 1$.



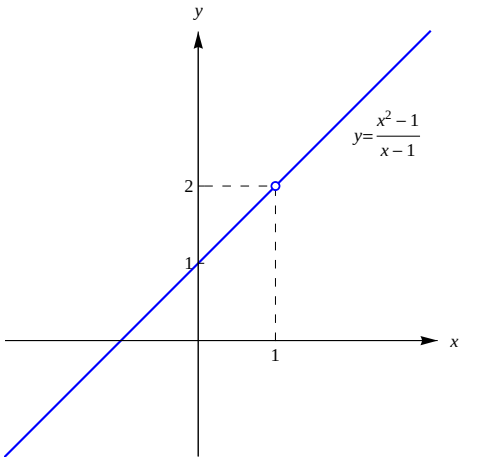
3.34. Példa. Az

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

függvény az $x = 1$ pontban nem folytonos, de megállapíthatjuk, hogy bármely $x_n \to 1$ és $x_n \neq 1$ sorozatra

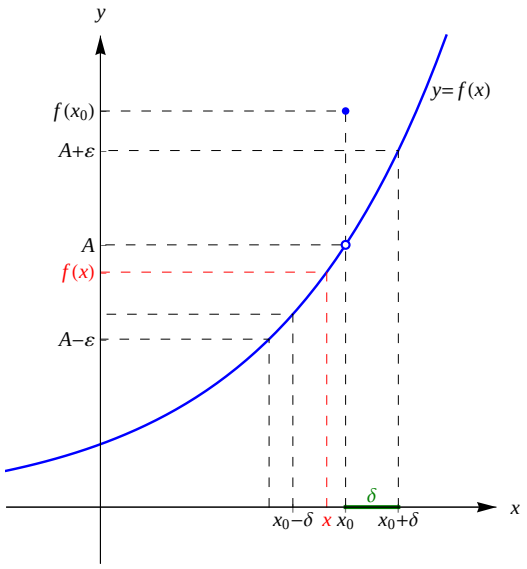
$$\left\{\frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1}\right\} = \{x_n + 1\}$$

konvergens és 2-höz tart.



3.35. Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény az origóban nem folytonos, de bármely más pontban igen. Bármely $x_n \neq 0$ és például $x_n \to 2$ sorozatra a $\left\{\dfrac{1}{x_n^2}\right\}$ konvergens, sőt határértéke megegyezik a függvény $x = 2$ pontban vett helyettesítési értékével, az $\dfrac{1}{4}$-del.

Az ilyen és hasonló tulajdonságú függvényekről azt mondjuk, hogy létezik a határértékük. Most is azt feltételezzük, hogy a vizsgált pont valamely környezetében vagy félkörnyezetében értelmezve van a függvény (a vizsgált helyen a függvény nem feltétlenül értelmezett).



3.16. Definíció. *Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény x_0 pontbeli határértéke az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$ (δ függvénye ε-nak és az x_0-nak), hogy ha $|x - x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Természetesen $x \in D_f$.*

3.36. Példa. A fenti példák esetében tehát felírható, hogy

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}|x| = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

3.17. Definíció. *Legyen az f függvény az x_0 pont valamely jobb, illetve bal oldali félkörnyezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény x_0 pontbeli jobboldali (baloldali) határértéke az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ (δ függvénye ε-nak és az x_0-nak), hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Természetesen $x \in D_f$.*

A jobboldali, illetve baloldali határértékek jelölése:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A.$$

3.37. Példa. a) Az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvény viselkedését az $x = 0$ pont környezetében a féloldali határértékek segítségével így írhatjuk fel:

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1.$$

b) Az $f(x) = [x]$ egészrész függvény viselkedése az $x = 3$ pont környezetében így írható fel:

$$\lim_{x\to 3-0} [x] = 3 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 3+0} [x] = 4.$$

c) Az $f(x) = \{x\}$ törtrész függvény viselkedése az $x = 2$ pont környezetében így írható fel:

$$\lim_{x\to 2-0} \{x\} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 2+0} \{x\} = 0.$$

3.8. Tétel. *Az f függvénynek az x_0 pontban akkor és csak akkor létezik határértéke, ha ott létezik a jobb és bal oldali határértéke és ezek egyenlőek, azaz*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

3.3.2. Függvény határértékének tulajdonságai

Most pedig megfogalmazunk néhány, a függvényekkel végezhető műveletekre, a függvények határértékére és folytonosságára vonatkozó egyszerű állítást.

3.9. Tétel. *Ha* $f(x) \geq 0$ *és* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *létezik, akkor* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$.

3.10. Tétel. *Ha* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *és* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *létezik, akkor az* x_0 *pontban az* f *és* g *függvények összegének és különbségének határértéke is létezik és*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x).$$

3.11. Tétel. *Ha* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *és* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *létezik, akkor az* x_0 *pontban az* f *és* g *függvények szorzatának határértéke is létezik és*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x).$$

3.12. Tétel. *Ha* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *és* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *létezik és* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, *akkor az* x_0 *pontban az* f *és* g *függvények hányadosának határértéke is létezik és*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

3.13. Tétel. *Ha* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *és* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *létezik, valamint az* x_0 *valamely környezetében* $f(x) \geq g(x)$, *akkor*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

3.14. Tétel. *(Rendőr-elv). Ha* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *és* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *határértékek léteznek és egyenlőek, azaz*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A$$

valamint az x_0 *valamely környezetében* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, *akkor*

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = A.$$

3.15. Tétel. *Az* f *függvénynek* x_0*-ban akkor és csak akkor létezik határértéke, ha* $\{f(x_n)\}$ *konvergens, valahányszor* $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$, $x_n \in D_f$.

3.16. Tétel. *Az* f *függvény akkor és csak akkor folytonos az* x_0 *pontban, ha az* x_0 *pontban létezik határértéke és*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.3.3. Végtelenben vett és végtelen határérték

Az eddigiekben véges helyen vett véges határértékről beszéltünk. A következőkben a véges helyen vett "végtelen értékű" és a "végtelenben vett" határértéket ismertetjük.

3.18. Definíció. *Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor az f függvénynek az x_0 pontban $+\infty$ ($-\infty$) a határértéke, ha bármely M számhoz megadható olyan $\delta > 0$ (δ függvénye M-nek és az x_0-nak), hogy ha $|x - x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$), akkor $f(x) > M$ ($f(x) < M$) teljesül. Természetesen $x \in D_f$.*

A végtelen határérték jelölése:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

3.38. Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, illetve a $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ függvény viselkedése az $x = 0$ pont környezetében felírható, mint

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty.$$

A fentiekhez hasonlóan definiálhatók a féloldali végtelen határértékek is.

3.39. Példa. a) A féloldali végtelen határértékek segítségével az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény viselkedése az $x = 0$ pont környezetében felírható, mint

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty.$$

b) A féloldali végtelen határértékre szükségünk akkor is, ha a logaritmusfüggvény viselkedését szeretnénk leírni az $x = 0$ pont környezetében, hiszen ez a függvény az $x = 0$ pontnak csak a jobboldali környezetében értelmezett. Felírható, hogy

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty \quad (a > 1) \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \log_a x = \infty \quad (0 < a < 1).$$

A következőkben feltesszük, hogy a megfelelő félegyenesen a függvény értelmezett.

3.19. Definíció. *Az f függvénynek a $+\infty$-ben ($-\infty$-ben) a határértéke az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan x^* (x^* függvénye ε-nak), hogy ha $x > x^*$ ($x < x^*$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Természetesen $x \in D_f$.*

A határérték jelölése a végtelenben:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

3.20. Definíció. *Az f függvénynek a $+\infty$-ben ($-\infty$-ben) a határértéke $+\infty$, illetve $-\infty$, ha bármely M számhoz van olyan x^* szám (x^* függvénye M-nek), hogy ha $x > x^*$ ($x < x^*$), akkor $f(x) > M$, illetve $f(x) < M$. Természetesen $x \in D_f$.*

A végtelenben vett végtelen határérték jelölése:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

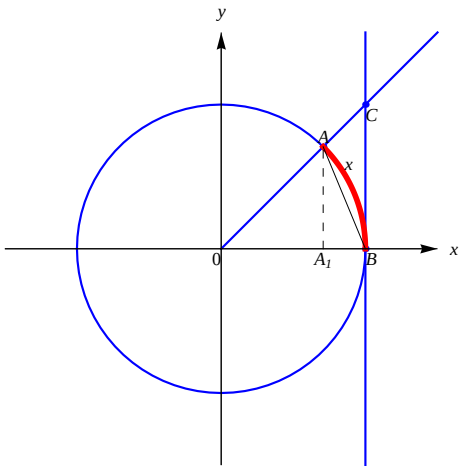
3.3.4. Néhány fontosabb határérték

I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Bizonyítás. Mivel a $\dfrac{\sin x}{x}$ függvény páros, ezért csak az $x>0$ esetet tárgyaljuk. Mutassuk meg először, hogy

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\quad \text{ha}\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

A bizonyításhoz felhasználjuk az egységsugarú kört, amelynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, a sugara pedig egy hosszúságegység. Ebben az x változót az $\overset{\frown}{AB}$ körív jelenti, ahol B a körvonal x-tengellyel való metszéspontja, A pedig a körvonal I. negyedbe eső tetszőleges pontja. Legyen A_1 az A pont x-tengelyre eső merőleges vetülete, C pedig az OA félegyenes és a kör B pontban szerkesztett érintőjének metszéspontja. A rajzról leolvasható, hogy $AA_1=\sin x$ és $BC=\operatorname{tg} x$, s az is jól látható, hogy az AOB körcikk területe az $OAB\triangle$ és az $OBC\triangle$ területe közé esik. Ennek következtében, mivel a kör sugara 1, következik, hogy



$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg} x,$$

amiből a $\sin x$ értékkel való osztás és 2-vel való szorzás után következik, hogy

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\quad \text{vagyis}\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Tudjuk, hogy az $f(x)=\cos x$ folytonos a 0 pontban és $\cos 0=1$. Így ha $x\to 0$ $(x\neq 0)$, akkor $\lim_{x\to 0}\cos x=1$. A *rendőr-elv* szerint tehát következik, hogy $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, ebből pedig a $\dfrac{\sin x}{x}$ függvény párossága miatt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ is igaz. $\diamond$

II. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

Bizonyítás. A bizonyítás a számsorozatokra vonatkozó $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ határérték segítségével történik. Ha $[x]$ az x valós szám egész része, akkor $[x]=n\in\mathbf{N}$ és érvényes az $[x]\le x<[x]+1$ egyenlőtlenség. Ha $x\to\infty$, akkor $[x]=n\to\infty$ is teljesül. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=e.$$

Legyen

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\quad\text{és}\quad g(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\quad n\in\mathbf{N}.$$

A számsorozatokról szóló fejezetben már beláttuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

Innen az

$$f_1(x)=f([x])=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\quad\text{és}\quad g_1(x)=g([x])=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

függvények definiálásával következik, hogy

$$\lim_{x\to\infty}f_1(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to\infty}f([x])=\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=e,$$

és

$$\lim_{x\to\infty}g_1(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\lim_{x\to\infty}g([x])=\lim_{n\to\infty}g(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}e.$$

Legyen most

$$h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g_1(x)=e$, valamint $f_1(x)\le h(x)\le g_1(x)$ érvényes minden x valós számra, ezért a *rendőr-elv* alapján

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

◇

III. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Bizonyítás. Ha a 2. alaphatárértékben bevezetjük az $\dfrac{1}{x}=y$ helyettesítést, akkor $x\to\infty$ akkor és csakis akkor, ha $y\to0$. Ekkor közvetlenül adódik, hogy

$$\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e,\quad\text{vagy}\quad y=x\quad\text{esetén}\quad\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

E ténynek és a logaritmusfüggvény folytonosságának felhasználásával adódik, hogy

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1.$$

◇

IV. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ $(a>0,\,a\ne1)$ és $a=e$ esetén $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az $y=a^x-1$ helyettesítést, ahol $x\to0$ akkor és csakis akkor, ha $y\to0$. Ekkor

$$x=\log_a(y+1)=\frac{\ln(1+y)}{\ln a},\quad\text{tehát}\quad\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}}=\ln a,$$

ahol a 3. alaphatárértéket és a két függvény hányadosának határértékére vonatkozó szabályt alkalmaztuk. ◇

V. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ $(\alpha\in\mathbf{R},\ \alpha\neq 0)$

Bizonyítás. Ha az $(1+x)^\alpha$ kifejezést $e^{\alpha\ln(1+x)}$ alakban írjuk fel és alkalmazzuk a 3. és 4. alaphatárértéket, akkor a következőket kapjuk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{\frac{y}{\alpha}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha\cdot 1\cdot 1=\alpha,$$

ahol az első határértéknél alkalmaztuk az $\alpha\ln(1+x)=y$ helyettesítést, ahol $x\to 0$ akkor és csakis akkor, ha $y\to 0$. ◇

VI. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2. alaphatárértéket. Ha $x\to 0+0$, akkor $t=\dfrac{1}{x}$ esetén $t\to+\infty$ és

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

Ha $x\to 0-0$, akkor $s=-\dfrac{1}{x}$ esetén $s\to-\infty$ és

$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{s\to+\infty}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-s}=\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{s}{s-1}\right)^s=\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{1}{s-1}\right)^{s-1+1}=$$

$$=\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{1}{s-1}\right)^{s-1}\cdot\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{1}{s-1}\right)^1=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\cdot 1=e.$$

A levezetés során alkalmaztuk a $z=s-1$ helyettesítést, ahol $z\to+\infty$, akkor és csakis akkor, ha $s\to+\infty$. ◇

Függvények határértékeinek kiszámításánál a következő határozatlan kifejezésekkel találkozhatunk:

1^o $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$,

2^o $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$,

3^o 1^∞, 0^0, ∞^0.

FELADATOK.

Számoljuk ki a következő határértékeket.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-5}{x-1}$

Megoldás. Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-5}{x-1} = \frac{4+6-5}{2-1} = 5.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-5}{x-1}$

Megoldás. Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-5}{x-1} = \frac{1+3-5}{1-1} = \frac{-1}{-0} = +\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Megoldás. Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{e^0-e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

Megoldás. Ugyancsak behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1-\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

5. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{x+2}$

Megoldás. Most is egyszerű behelyettesítéssel kapjuk meg a keresett határértéket:

$$\lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{x+2} = \frac{-\infty}{0+2} = -\infty.$$

Amennyiben a határérték behelyettesítés után $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés, akkor x legmagasabb kitevőjű hatványának a számlálóból és a nevezőből való kiemelésével, majd leegyszerűsítésével juthatunk egyszerűbb alakhoz, amelyből a határérték meghatározható. Ezt a megoldási módszert már alkalmaztuk a sorozatok határértékeinél is, ezért az analógia miatt csak néhány feladatot mutatunk be.

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3-2x+7}{4x^3+5x^2+6x}$

Megoldás. Ha végtelen nagy számot helyettesítünk az x változó helyébe, akkor $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezést kapunk. Ekkor

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+7}{4x^3+5x^2+6x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3})}{x^3(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{3}{4},$$

mivel $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{C}{x^k}=0$, ha $C=konstans$ és $n\in\mathbf{N}$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{3x^2-2x+1}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2+x+1}{3x^2-2x+1}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{-\infty}{3}=-\infty.$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{7x^2-8x+2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{7x^2-8x+2}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(7x-8+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{7x-8+\frac{2}{x}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-4}{\sqrt{9x^2+18x+9}}$

Megoldás. Mivel $x<0$ esetén $|x|=-x$, így

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{\sqrt{9x^2+18x+9}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\left(1-\frac{4}{3x}\right)}{|3x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\left(1-\frac{4}{3x}\right)}{-3x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{4}{3x}\right)}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Amennyiben a határérték behelyettesítés után $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés és a racionális törtfüggvényünk van, akkor a számláló és a nevező tényezőkre bontásával, majd leegyszerűsítésével juthatunk egyszerűbb alakhoz, amelyből a határérték meghatározható. Ha irracionális függvényünk van, akkor általában gyökteleníteni kell, ha pedig trigonometrikus a függvény, akkor általában a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ alaphatárérték alkalmazásával próbáljuk megszüntetni a határozatlanságot.

11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x^3-16x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x^3-16x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{x(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x(x+4)}=\frac{0}{32}=0.$$

12. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{2x^3+2x^2-16x-24}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2+x-6}{2x^3+2x^2-16x-24}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)(x+2)(x+3)}{2(x+2)^2(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)(x+3)}{2(x+2)(x-3)}=\frac{-3\cdot 1}{2\cdot 0\cdot(-5)}=\frac{-3}{-0}=+\infty.$$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$

Megoldás. Mivel a kifejezés $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés és irracionális, ezért gyöktelenítéssel juthatunk el a megoldásig.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{0\cdot 2}=\frac{1}{0}=\infty.$$

14. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+17}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+17}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt{x+17}-5}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+17}+5}{\sqrt{x+17}+5}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{x+17-25}{x-8}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+17}+5}\right)=\lim_{x\to 8}\left(1\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+17}+5}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{64}+2\cdot\sqrt[3]{8}+4}{\sqrt{25}+5}=\frac{4+2\cdot 2+4}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}.$$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{\sin x}$

Megoldás. Mivel trigonometrikus függvény határértékét kell kiszámítanunk, a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ alaphatárértéket alkalmazzuk a megoldás során.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 2x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\frac{3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}-2\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=$$

$$=3\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}-2\cdot 1=3\cdot 1-2=1,$$

ahol a $3x=t$, $x\to 0$ akkor és csakis akkor ha $t\to 0$ helyettesítést alkalmaztuk.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2},$$

vagy másik módszerrel

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

18. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

Megoldás.

$$A=\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Vezessük be az $1-x=t$ helyettesítést, ahol $x\to 1$ akkor és csakis akkor, ha $t\to 0$. Ekkor

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{t\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t+\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\frac{\pi}{2}t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\lim_{t\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot 1=\frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{\pi}.$$

19. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x} \cdot \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{1-\operatorname{tg} x-1-\operatorname{tg} x}{2\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{-1}{\cos^2 x\left(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}\right)} = \frac{-1}{(-1)^2\cdot(\sqrt{1}+\sqrt{1})} = -\frac{1}{2}.$$

20. $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

Megoldás. Az $x \to 0-0$ jelölés azt jelenti, hogy balról, vagyis negatív értékeken keresztül közelítünk a nulla felé.

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x} =$$

$$= \sqrt{2}\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{|\sin x|}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}\right) = \sqrt{2}\lim_{x\to 0-0}\left(\left|\frac{\sin x}{x}\right|\cdot\frac{|x|}{x}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\lim_{x\to 0-0}\left(\left|\frac{\sin x}{x}\right|\cdot\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}\right) = \sqrt{2}\cdot 1\cdot(-1) = -\sqrt{2}.$$

Amennyiben a határérték a közvetlen behelyettesítés után $\infty-\infty$ típusú, akkor irracionális különbség esetén gyöktelenítéssel, törtek különbségének estén pedig közös nevezőre hozással szabadulhatunk meg a határozatlanságtól.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

Megoldás. Az adott határérték $\infty-\infty$ típusú és irracionális, ezért végezzük el a gyöktelenítést. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+5x-3}+\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2+5x-3}+\sqrt{x^2-3x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x-3-x^2+3x-2}{\sqrt{x^2+5x-3}+\sqrt{x^2-3x+2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x-5}{\sqrt{x^2+5x-3}+\sqrt{x^2-3x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(8-\frac{5}{x})}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} = \frac{8}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 4.$$

22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)$

Megoldás. Mivel most $x\to-\infty$, ezért a határérték $\infty-\infty$ típusú. A gyöktelenítés elvégzésével kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{\sqrt{x^2-2x+3}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+3-x^2}{\sqrt{x^2-2x+3}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-2+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1.$$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5}-\sqrt[3]{x^3-5}\right)$

Megoldás. A határérték $\infty-\infty$ típusú. Gyöktelenítsünk a megfelelő módon.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5}-\sqrt[3]{x^3-5}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5}-\sqrt[3]{x^3-5}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}+\sqrt[3]{(x^3+5)(x^3-5)}+\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}+\sqrt[3]{(x^3+5)(x^3-5)}+\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5-x^3+5}{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}+\sqrt[3]{(x^3+5)(x^3-5)}+\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}+\sqrt[3]{(x^3+5)(x^3-5)}+\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}=\frac{10}{\infty}=0.$$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x+x-\sqrt{x^2-2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[3]{x^3}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}+$$

$$+\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}+\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1\right)} + \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{|x|\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1} + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{3}{1+1+1} + \frac{2}{1+1} = 2.$$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^4-x^2+2}-\sqrt{x^2+x}\right)$

Megoldás. Az adott határérték $\infty-\infty$ típusú. Végezzük el kétszer a gyöktelenítést. Ekkor

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^4-x^2+2}-\sqrt{x^2+x}\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^4-x^2+2}-\sqrt{x^2+x}\right)\cdot\frac{\sqrt[4]{x^4-x^2+2}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt[4]{x^4-x^2+2}+\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^2+2}-(x^2+x)}{\sqrt[4]{x^4-x^2+2}+\sqrt{x^2+x}}\cdot\frac{\sqrt{x^4-x^2+2}+(x^2+x)}{\sqrt{x^4-x^2+2}+(x^2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2-x^4-2x^3-x^2}{(\sqrt[4]{x^4-x^2+2}+\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^4-x^2+2}+(x^2+x))} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3-2x^2+2}{x\left(\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+1+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(-2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\cdot\left(\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-2}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3+2x}-x\right)$

Megoldás. Az adott határérték $\infty-\infty$ típusú, de nem irracionális. Közös nevezőre hozással $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezést kapunk.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3+2x}-x\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^4-2x^2}{x^3+2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^3+2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x+\frac{2}{x}} = 0.$$

27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3}{4x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

Megoldás. A határérték most $-\infty-(-\infty)$, azaz $\infty-\infty$ típusú. Hozzunk közös nevezőre.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{4x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2(2x-1)}{4x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-2x^3+x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2\left(4-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{4}.$$

28. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-1}\right)$

Megoldás. Ha az x helyébe 1-et helyettesítünk, akkor $\infty-\infty$ típusú határozatlan kifejezést kapunk, ezért közös nevezőre hozunk.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty.$$

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$

Megoldás. Az $x=1$ helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy $\infty-\infty$ típusú a határérték. Bontsuk tényezőkre a nevezőket, majd hozzunk közös nevezőre.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}+\frac{x-4}{3(x-1)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2)(x-2)+(x-4)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12+x^2-8x+16}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-8x+4}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{3(x-2)(x-4)}=\frac{0}{-3\cdot(-3)}=0.$$

30. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x^3+4x^2+4x}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{1}{x^3+4x^2+4x}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{x(x+2)^2}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)-(x+1)}{x(x+1)(x+2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x-x-1}{x(x+1)(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x+2)^2}=\frac{4-2-1}{0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Ha a határérték 1^∞ típusú határozatlan kifejezés, akkor a megoldást helyettesítéssel, a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ alaphatárértékre való visszavezetéssel keressük.

31. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{3x^2+1}$

Megoldás. Mivel $x\to+\infty$ esetén $\dfrac{x+1}{x}\to 1$, így 1^∞ típusú a határérték. Végezzük el a következő transzformációkat, amelyekkel megszüntethetjük a határozatlanságot.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x^2+1}=(1^\infty)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{3x^2+1}{x}}=$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Az átalakításoknál felhasználtuk az $y = e^x$ függvény folytonosságát és ennek alapján adott g valós függvényre

$$\lim_{x\to+\infty} e^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}.$$

32. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+6}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = (1^\infty) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1+5}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{5}}\right)^{\frac{2x+1}{5}\cdot\frac{5}{2x+1}\cdot\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{5}}\right)^{\frac{2x+1}{5}}\right]^{\frac{5x+5}{6x+3}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{5}}\right)^{\frac{2x+1}{5}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+5}{6x+3}} = \left[\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+5}{6x+3}} = e^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{e^5},$$

ahol bevezettük a $\dfrac{2x+1}{5} = z$ helyettesítést, amelyre érvényes, hogy ha $x \to +\infty$ akkor $z \to +\infty$.

33. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+3}{x^2+2x+4}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+3}{x^2+2x+4}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{3x+1}{x^2-x+3}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1^{\frac{x^2+1}{x}}}{\left(1+\frac{3x+1}{x^2-x+3}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1^{\frac{x^2+1}{x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3x+1}{x^2-x+3}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{1}{e^3},$$

mert

$$\lim_{x\to+\infty}1^{\frac{x^2+1}{x}} = 1^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}} = 1^{+\infty} = 1$$

és

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x+1}{x^2-x+3}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-x+3}{3x+1}}\right)^{\frac{x^2-x+3}{3x+1}\cdot\frac{3x+1}{x^2-x+3}\cdot\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-x+3}{3x+1}} \right)^{\frac{x^2-x+3}{3x+1}} \right]^{\frac{3x+1}{x^2-x+3}\cdot\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-x+3}{3x+1}} \right)^{\frac{x^2-x+3}{3x+1}} \right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2-x+3}\cdot\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \left[\lim_{z\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{z} \right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+x^2+3x+1}{x^3-x^2+3x}} = e^3,$$

ahol alkalmaztuk az $\dfrac{x^2-x+3}{3x+1} = z$ helyettesítést, amely esetén ha $x \to +\infty$ akkor $z \to +\infty$.

A következő két feladatban alkalmazzuk a $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ alaphatárértéket.

34. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Megoldás. A határérték 1^∞ típusú határozatlan kifejezés és a következőképpen oldható meg:

$$\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

35. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Megoldás. Hasonlóan járunk el, mint az előző feladatban.

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = \lim_{x\to0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to0}\left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$

$$= \left[\lim_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

A levezetésben alkalmaztuk a $z = \cos x - 1$ helyettesítést, ahol $z \to 0$, ha $x \to 0$ és felhasználtuk a 17. feladatból, hogy

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Alkalmazzuk a következő két feladatban a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ alaphatárértéket.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$

Megoldás. Végezzük el a következő transzformációkat:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\cos 2x-1)}{\cos 2x-1}\frac{\cos 2x-1}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 2x-1)}{\cos 2x-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}.$$

Az első határértékben alkalmazzuk a $\cos 2x-1=t$ helyettesítést, ahol ha $x\to 0$, akkor $t\to 0$. A második határértékben vezessük be a $2x=z$ helyettesítést, ahol ha $x\to 0$, akkor $z\to 0$, majd használjuk fel ismét a 17. feladat megoldását. Ekkor

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot(-4)\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=1\cdot(-4)\cdot\frac{1}{2}=-2.$$

37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 4x)}$

Megoldás. Járjunk el a következő módon:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 4x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 3x-1)}{\ln(1+\cos 4x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\cos 3x-1)}{\cos 3x-1}}{\frac{\ln(1+\cos 4x-1)}{\cos 4x-1}}\cdot\frac{\frac{\cos 3x-1}{x^2}}{\frac{\cos 4x-1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 3x-1)}{\cos 3x-1}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 4x-1)}{\cos 4x-1}}\cdot\frac{(-9)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}}{(-16)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{-9\cdot 1}{-16\cdot 1}=\frac{9}{16}.$$

38. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-\cos x}{x^2}$ $(a>0)$ határértéket a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ alaphatárértékre való visszavezetéssel.

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{z\to 0}\frac{a^z-1}{z}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

ahol az első határértékben az $x^2=z$ határértéket alkalmaztuk ($z\to 0$, ha $x\to 0$), a második pedig a 17. feladatból ismert megoldás.

39. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$ $(a>0)$ határértéket a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ alaphatárérték alkalmazásával.

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{\sin x}-\frac{e^{bx}-1}{\sin x}\right)=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{ax}-1}{ax} \cdot \frac{ax}{\sin x} \right) - \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{bx}-1}{bx} \cdot \frac{bx}{\sin x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} \cdot a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx}-1}{bx} \cdot b \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = a - b.$$

40. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\sin x} - \sqrt[3]{1+\sin x}}{x}$ $(a > 0)$ határértéket a

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 0)$$

alaphatárérték felhasználásával.

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\sin x} - \sqrt[3]{1+\sin x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\sin x} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1+\sin x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\sin x} - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin x} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1}{-\sin x} \cdot \frac{-\sin x}{x} \right) - \lim_{x\to 0} \left(\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{3}} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(1+z)^{\frac{1}{2}} - 1}{z} \cdot (-1) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{3}} - 1}{t} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}.$$

3.3.5. Valós függvény szakadáspontjai és aszimptotái

3.21. Definíció. *Ha az f függvény az x_0 helyen nem folytonos, akkor x_0 a függvény szakadáspontja. Ilyenkor azt mondjuk, hogy x_0 a függvénynek*

1. *megszüntethető szakadása, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ és $L \neq f(x_0)$, azaz a függvénynek az x_0 pontban létezik határértéke, de az nem egyezik meg a függvény értékével az adott pontban;*

2. *első típusú szakadása, ha $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = L_1$ és $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = L_2$, de $L_1 \neq L_2$, azaz a függvénynek létezik baloldali és jobboldali határértéke is, de azok nem egyenlőek;*

3. *második típusú szakadása, ha a szakadás nem megszüntethető szakadás és nem is első típusú szakadás.*

3.40. Példa. *a)* Az $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ függvény az $x = 0$ pontban nem folytonos, mert nem is értelmezett, de itt véges határértéke van:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Az $x = 0$ pont tehát az f függvénynek megszüntethető szakadása. Az f függvény szakadását az új f_1 függvény definiálásával szüntethetjük meg. Ekkor az

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{ha } x \neq 1, \\ 2, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

függvény minden valós számra értelmezett és folytonos.

b) Az $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ függvény az $x = 0$ pontban nem folytonos, mert nem is értelmezett, viszont van véges határértéke:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Az $x = 0$ pont tehát az f függvénynek megszüntethető szakadása. Az

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

függvény minden valós számra értelmezett és folytonos.

c) A 3.37. Példa függvényeinek a szemlélt pontokban első típusú szakadása van, tehát az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvénynek az $x = 0$ pontban, $f(x) = [x]$ függvénynek az $x = 3$ pontban és $f(x) = \{x\}$ függvénynek az $x = 2$ pontban, hiszen baloldali és jobboldali határértékeik léteznek a szemlélt pontokban, de azok egymással nem egyenlőek.

d) Az $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ függvény az $x = 2$ pontban nem folytonos (minden más helyen igen). A függvénynek itt második típusú szakadása van, mert a baloldali és jobboldali határértékek $\pm\infty$-be tartanak, ugyanis

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-0-2} = \frac{1}{-0} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2+0-2} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

e) az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvénynek az $x = 0$ pontban szintén második típusú szakadása van, mert itt nincs határértéke, ugyanis a baloldali és jobboldali határértékek nem egyeznek meg.

$$\lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

3.22. Definíció. *Az $x = a$ egyenesre akkor mondjuk, hogy az $y = f(x)$ függvénygrafikon függőleges (vagy vertikális) aszimptotája, ha a*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \textit{vagy} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$$

határértékek valamelyike teljesül.

3.41. Példa. *a)* Az $f(x) = \log_a x$ logaritmusfüggvénynek az $x = 0$ egyenes féloldali függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty \quad (a > 1) \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \log_a x = \infty \quad (0 < a < 1).$$

b) Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek az $x = 0$ egyenes függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \infty.$$

c) Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvénynek az $x = \dfrac{\pi}{2}$ egyenes függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

d) Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvénynek az $x = 0$ egyenes függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{ctg} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{ctg} x = \infty.$$

e) Az $f(x) = \operatorname{arth} x$ függvénynek az $x = -1$ és $x = 1$ egyenesek féloldali függőleges aszimptotái, mert

$$\lim_{x\to -1+0} \operatorname{arth} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1-0} \operatorname{arth} x = \infty.$$

f) Az $f(x) = \operatorname{arcth} x$ függvénynek az $x = -1$ és $x = 1$ egyenesek féloldali függőleges aszimptotái, mert

$$\lim_{x\to -1-0} \operatorname{arcth} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1+0} \operatorname{arcth} x = \infty.$$

3.23. Definíció. *Az $y = kx + n$ egyenest akkor nevezzük az $y = f(x)$ függvénygrafikon ferde aszimptotájának, az $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ esetében, ha az f függvény és az adott egyenes megfelelő ordinátája közötti különbség nullához tart, ha $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, vagyis ha*

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0 \quad \left(\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0 \right).$$

Ha $k = 0$, akkor az $y = n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygrafikon vízszintes (vagy horizontális) aszimptotája $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ esetén.

Megjegyezzük, hogy a függvényeknek lehetnek közös ferde vagy vízszintes aszimptotái $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ esetén, amit $x \to \pm\infty$ módon szoktunk felírni.

3.42. Példa. *a)* Az $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ függvénynek az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to -\infty} \log_a x = 0 \quad (a > 1) \quad \text{és} \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = 0 \quad (0 < a < 1).$$

b) Az $f(x)=\dfrac{1}{x}$ függvénynek az $y=0$ egyenes vízszintes aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

c) Az $f(x)=\operatorname{arctg}x$ és $f(x)=\operatorname{arcctg}x$ függvényeknek az $y=-\dfrac{\pi}{2}$ és $y=\dfrac{\pi}{2}$ egyenesek vízszintes aszimptotái, mert

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x=-\frac{\pi}{2}.$$

d) Az $f(x)=\operatorname{th}x$ és $f(x)=\operatorname{cth}x$ függvényeknek az $y=-1$ és $y=1$ egyenesek vízszintes aszimptotái, mert

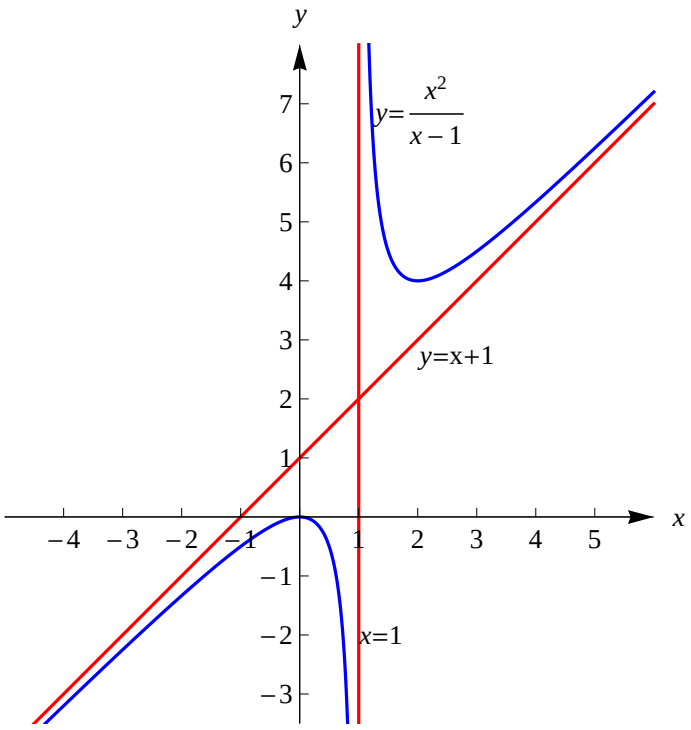
$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{th}x=-1,\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{th}x=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{cth}x=-1,\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{cth}x=1.$$

3.43. Példa. Mivel $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$, ezért $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x-1}$. Ennek alapján

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0,$$

tehát a definíció alapján az $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ függvénynek az $y=x+1$ egyenes ferde aszimptotája. Ugyanakkor az $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ függvénygrafikonnak az $x=1$ egyenes függőleges aszimptotája, hiszen

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{x-1}=\frac{(1-0)^2}{1-0-1}=\frac{1}{-0}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{x-1}=\frac{(1+0)^2}{1+0-1}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$



A ferde aszimptota meghatározása nem mindig lehetséges az előző példában bemutatott eljárással. Ezért van szükség a következő tételre.

3.17. Tétel. *Az $y = f(x)$ függvénygrafikonnak az $y = kx + n$ egyenes $x \to +\infty$ esetén ($x \to -\infty$ esetén) akkor és csakis akkor ferde aszimptotája, ha a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \right) \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = n \left(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = n \right)$$

határértékek léteznek.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $y = kx + n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygrafikon ferde aszimptotája, ha $x \to +\infty$, azaz teljesüljön a $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0$ feltétel. Igazoljuk, hogy a ferde aszimptota k és n együtthatóit a

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{és} \quad n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]$$

határértékek segítségével tudjuk meghatározni, s hogy ezek léteznek.
E célból vezessük be az $f(x)-(kx+n) = \alpha(x)$ helyettesítést, amelyből $f(x) = kx+n+\alpha(x)$ adódik, ahol $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + n + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{n}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [(kx + n + \alpha(x)) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [n + \alpha(x)] = n,$$

tehát az állítás beláttuk.
Fordítva, tegyük most fel, hogy léteznek a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = n$$

határértékek. Igazoljuk, hogy az $y = kx + n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygrafikon ferde aszimptotája, ha $x \to +\infty$. Ekkor a második határértékből az $\alpha(x) = f(x) - (kx + n)$ jelölést alkalmazva adódik, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + n)] = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] - n = n - n = 0,$$

innen pedig

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0,$$

vagyis az $y = kx + n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygrafikon ferde aszimptotája, ha $x \to +\infty$.
A bizonyítás analóg módon az $x \to -\infty$ esetben is elvégezhető. ◇

3.44. Példa. Az $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ függvény ferde aszimptotáit az előbbi tétel képletei segítségével is kiszámíthatjuk. Ekkor a ferde aszimptotát az $y = kx+n$ egyenes alakjában keressük, ahol

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

tehát $y = x + 1$ a keresett ferde aszimptota.

FELADATOK.

Vizsgáljuk ki a következő függvények aszimptotáit.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

Megoldás. Mivel $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$, így a függvény értelmezési tartománya $D_f = R \setminus \{-2, 1\}$. Ez azt jelenti, hogy $x = -2$-ben és $x = 1$-ben a függvénynek szakadáspontja van. Mivel

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(-2-0+2)(-2-0-1)} = \frac{1}{-0\cdot(-3)} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(-2+0+2)(-2+0-1)} = \frac{1}{+0\cdot(-3)} = -\infty,$$

így a függvénynek az $x = -2$ egyenes függőleges aszimptotája. Mivel

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(1-0+2)(1-0-1)} = \frac{1}{3\cdot(-0)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(1+0+2)(1+0-1)} = \frac{1}{3\cdot(+0)} = +\infty,$$

ezért a függvénynek az $x = 1$ egyenes függőleges aszimptotája.
A függvénynek az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = 0.$$

Mivel az $y = kx + n$ ferde aszimptota $k = 0$ esetén lesz vízszintes helyzetű ($y = n$), ezért ha a függvénynek van vízszintes aszimptotája, akkor nincs ferde aszimptotája, és fordítva.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 5}{x + 2}$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$. A függvénynek az $x = -2$ egyenes függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^2 - x - 5}{x+2} = \frac{(-2-0)^2 - (-2-0) - 5}{-2-0+2} = \frac{1}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{x^2 - x - 5}{x+2} = \frac{(-2+0)^2 - (-2+0) - 5}{-2+0+2} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Mivel

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x - 5}{x+2} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x - 5}{x+2} = -\infty,$$

ezért a függvénynek nincs vízszintes aszimptotája.
A ferde aszimptotát $y = kx + n$ alakban keressük, ahol

$$k = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2 - x - 5}{x^2 + 2x} = 1,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2 - x - 5}{x+2} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - x - 5 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x-5}{x+2} = -3,$$

így az $y = x - 3$ egyenes a függvény ferde aszimptotája.

3. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$.
Az $x = 0$ egyenes a függvény egyoldali függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{-0}} = e^{+\infty} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{+0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Mivel

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{\infty}} = e^{-0} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{-\infty}} = e^{+0} = 1,$$

ezért az $y = 1$ egyenes a függvény vízszintes aszimptotája, és így a függvénynek ferde aszimptotája nincs.

4. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

Megoldás. Mivel $D_f = \mathbf{R}$, ezért a függvénynek nincs szakadáspontja, s így függőleges aszimptotája sem. Mivel

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \operatorname{arctg} x) = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty}(x - \operatorname{arctg} x) = -\infty - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty,$$

ezért a függvénynek nincs vízszintes aszimptotája.
Keressük $y = kx + n$ alakban a ferde aszimptotát. Mivel

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 1,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 - \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 1,$$

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty}(x - \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to+\infty}(-\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}$$

és

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty}(x - \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to-\infty}(-\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2},$$

ezért a függvénynek két ferde aszimptotája van, ezek pedig az $y = x - \frac{\pi}{2}$ és az $y = x + \frac{\pi}{2}$ egyenesek. Ha $x \to +\infty$, akkor a függvény az $y = x - \frac{\pi}{2}$ egyeneshez, ha $x \to -\infty$, akkor pedig a függvény az $y = x + \frac{\pi}{2}$ egyeneshez közelít. Vegyük észre, hogy az f függvény grafikonjának most egymással párhuzamos ferde aszimptotái vannak.

5. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x - 6}$

Megoldás. Az f függvény akkor értelmezett, ha $x^2 - x - 6 \geq 0$, illetve ha az $(x-3)(x+2) \geq 0$ egyenlőtlenség igaz, ami a $D_f = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ értelmezési tartományon teljesül.
Mivel a függvény $x = -2$-ben és $x = 3$-ban értelmezett, azaz az $f(-2) = -2$ és $f(3) = 3$ valós értékek léteznek, ezért a függvénynek függőleges aszimptotája nincs.
Vizsgáljuk ki, hogy van-e vízszintes aszimptotája.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x - 6}\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(x - \sqrt{x^2 - x - 6}\right) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - x - 6}}{x + \sqrt{x^2 - x - 6}}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x + 6}{x + \sqrt{x^2 - x - 6}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+6}{x + |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{6}{x}\right)}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

viszont

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x - 6}\right) = -\infty - \infty = -\infty,$$

és ez azt jelenti, hogy a függvénynek $x \to +\infty$ esetén az $y = \dfrac{1}{2}$ egyenes vízszintes aszimptotája, de $x \to -\infty$ esetén nincs vízszintes aszimptotája.
A ferde aszimptota kivizsgálását ezért csak az $x \to -\infty$ esetére korlátozzuk. Keressük a függvény ferde aszimptotáját $y = kx + n$ alakban. Ekkor

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - x - 6}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}\right)}{x} = 1 + \sqrt{1} = 2$$

és

$$n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x - 6} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-x - \sqrt{x^2 - x - 6}\right) = (-1) \cdot \lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - x - 6}\right) =$$

$$= (-1) \cdot \lim_{x\to-\infty} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - x - 6}\right) \cdot \frac{x - \sqrt{x^2 - x - 6}}{x - \sqrt{x^2 - x - 6}}\right] =$$

$$= (-1) \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2 + x + 6}{x - |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}} = (-1) \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1 + \frac{6}{x}\right)}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}\right)} =$$

$$= (-1) \cdot \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2},$$

vagyis $x \to -\infty$ esetén a függvénynek ferde aszimptotája van, mégpedig az

$$y = 2x - \frac{1}{2} \quad \text{egyenes.}$$

4. Egyváltozós valós függvények differenciálszámítása

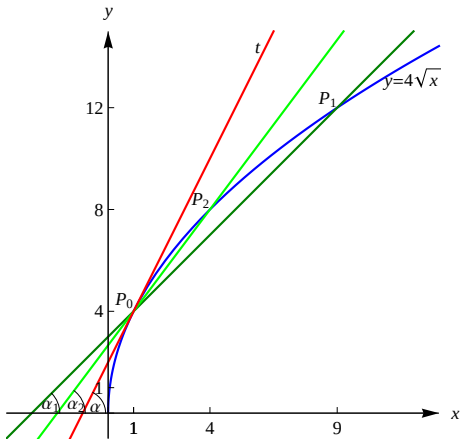
4.1. A differenciálszámítás alapfogalmai

4.1.1. A görbe érintője és a pillanatnyi sebesség

Tekintsük az $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ $f(x) = 4\sqrt{x}$ függvényt. Húzzuk meg az $y = 4\sqrt{x}$ görbe egy szelőjét a $P_0(1, 4\sqrt{1})$ és $P_1(9, 4\sqrt{9})$ pontokon át, majd egy másikat a $P_0(1, 4\sqrt{1})$ és $P_2(4, 4\sqrt{4})$ pontokon keresztül. (A *görbe szelőjének* nevezünk minden olyan egyenest, amelynek a görbével legalább két közös pontja van.) Ezeknek a szelőknek az iránytényezője

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{4\sqrt{9} - 4\sqrt{1}}{9-1} = 1, \quad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{4\sqrt{4} - 4\sqrt{1}}{4-1} = \frac{4}{3}.$$

Képzeljünk el egy olyan $\{x_n\}$ számsorozatot, ahol $x_1 = 9$, $x_2 = 4$, a sorozat többi eleme pedig monoton csökkenve tart 1-hez, azaz $x_n \to 1$. Ha szelőt fektetünk a $P_0(1, 4\sqrt{1})$ és valamely $P_n(x_n, 4\sqrt{x_n})$ ponton keresztül, akkor a kapott szelő iránytangense



$$k_n = \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{4\sqrt{x_n} - 4\sqrt{1}}{x_n - 1} \quad \text{és}$$

$$A = \lim_{x_n \to 1} \operatorname{tg}\alpha_n = \lim_{x_n \to 1} \frac{4\sqrt{x_n} - 4\sqrt{1}}{x_n - 1} = \lim_{x_n \to 1} \frac{4(\sqrt{x_n} - \sqrt{1})}{x_n - 1} \cdot \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{1}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{1}} =$$

$$= 4 \lim_{x_n \to 1} \frac{x_n - 1}{(x_n - 1)(\sqrt{x_n} + \sqrt{1})} = 4 \lim_{x_n \to 1} \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{1}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ha $x_n \to 1$, akkor a megfelelő szelők sorban az $y = 4\sqrt{x}$ görbe $P_0(1, 4)$ pontban húzott érintőjéhez tartanak, tehát $A = 2$ ennek az érintőnek az iránytényezője. (A *görbe érintőjének* nevezünk minden olyan egyenest, amelynek a görbével legalább egy közös pontja van és a közös pont - úgynevezett érintési pont - egy környezetében a görbe csak az egyenes egyik oldalán helyezkedik el.)

Általánosan tekintsünk egy f függvényt, amely értelmezett az $x_0 \in \mathbf{R}$ pont egy környezetében. Vegyünk ismét $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ pontokat és tekintsük a $P_0(x_0, f(x_0))$ és $P_n(x_n, f(x_n))$ pontokon áthaladó szelő iránytangensét. Jelölje $\Delta x = x_n - x_0$ az x-tengelyen az x_0 ponttól való eltávolodás mértékét, azaz az x független változó növekményét és

$\Delta y = f(x_n) - f(x_0)$ az y-tengelyen az $f(x_0)$ függvényértéktől való eltávolodás mértékét, azaz az f függvény x_0 ponthoz tartozó növekményét. Most

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

alakban is felírható, s ezt a $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ hányadost az $y = f(x)$ függvénygörbe $x = x_0$ ponthoz tartozó differenciahányadosának (különbségi hányadosának) nevezzük. Ha létezik az

$$A = \lim_{x_n \to x_0} \operatorname{tg} \alpha_n = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény grafikonjának a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontban létezik érintője és ennek az érintőnek az iránytangense A.

Tekintsük most az egyik speciális mozgást, a szabadesést. Ha egy golyót leejtünk akkor a golyó t_0 idő alatt $s_0 = \dfrac{g}{2} t_0^2$, t_n idő alatt pedig $s_n = \dfrac{g}{2} t_n^2$ utat tesz meg (g a nehézségi gyorsulás). A

$$\frac{\frac{g}{2} t_n^2 - \frac{g}{2} t_0^2}{t_n - t_0}$$

hányados azt az átlagsebességet mutatja, amivel haladva a golyó az $s_n - s_0$ utat $t_n - t_0$ idő alatt tenné meg. Ha t_n olyan időpillanatok sorozata, hogy $t_n \neq t_0$, $t_n \to t_0$, akkor ha a

$$v = \lim_{t_n \to t_0} \frac{\frac{g}{2} t_n^2 - \frac{g}{2} t_0^2}{t_n - t_0}$$

határérték létezik, akkor ezt a v határértéket a mozgó test t_0 időpontbeli pillanatnyi sebességének nevezzük.

Általánosan, ha ismerjük az $s = s(t)$ útfüggvényt, és t_n olyan időpillanatok sorozata, hogy $t_n \neq t_0$, $t_n \to t_0$, valamint ha $\Delta t = t_n - t_0$ az idő, mint független változó növekménye és $\Delta s = s(t_n) - s(t_0)$ az útfüggvény növekménye, akkor a t_0 időpontban a mozgó test pillanatnyi sebessége

$$v = \lim_{t_n \to t_0} \frac{s(t_n) - s(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

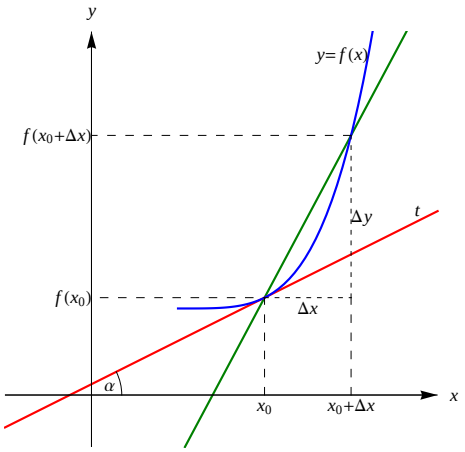
A két problémában az közös, hogy 0-val nem lehet osztani. Ezért kell a szelők iránytangenseiből, illetve az átlagsebességekből sorozatokat képezni és vizsgálni, hogy e sorozatok konvergensek-e.

4.1.2. A derivált (differenciálhányados) fogalma

Egy pontbeli érintő és egy időpontbeli sebesség problémájának vizsgálata ugyanarra a feladatra vezetett. Azt kell vizsgálni, hogy ha adott egy $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ függvény és $x_0 \in (a, b)$, akkor az

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

differenciahányados függvénynek létezik-e határértéke az x_0 pontban, ha Δx közelít nullához.



Sok más gyakorlati (sűrűség, áramerősség, gyorsulás) és elméleti feladat is ugyanerre a problémára vezet, ezért érdemes erre a határértékre külön elnevezést bevezetni.

4.1. Definíció. *Legyen f az (a, b) intervallumon értelmezett függvény és $x_0 \in (a, b)$ egy adott pont. Legyen továbbá Δx az x független változó olyan növekménye, amelyre igaz, hogy $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Ekkor az f függvényt az x_0 pontban deriválhatónak vagy differenciálhatónak nevezzük, ha létezik a*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

határérték. Ezt a határértéket nevezzük az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának vagy differenciálhányadosának, szokásos jelölése pedig

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

A derivált további jelölései:

$$\left. f'(x)\right|_{x=x_0}, \qquad \text{illetve} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Ez utóbbi jelölés egybetartozó szimbólum, a törtvonal tehát nem osztást jelöl!

Szokás a derivált definíciójában használni a $\Delta x = h$ jelölést. Ekkor az f függvény x_0 helyen vett deriváltját így is írhatjuk:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Vezessük be most az $x = x_0 + \Delta x$ jelölést. Ez esetben $\Delta x \to 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \to x_0$. Ezzel a jelöléssel az f függvény x_0 helyen vett differenciálhányadosa a következő ekvivalens alakban írható fel:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Mivel az x_0 pontbeli differenciálhányados értéke a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontban megegyezik az $y = f(x)$ függvénygörbéhez húzott t érintő meredekségével, vagyis

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

ezért a t érintőegyenes egyenlete

$$t: \ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontban $y = f(x)$ függvénygörbéhez húzott n merőleges egyenes egyenlete pedig

$$n: \ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Látható, hogy a differenciálhatóság a függvény pontbeli tulajdonsága, bár a pont környezetében való értelmezettsége is követelmény. Természetesen vannak olyan függvények, amelyek értelmezési tartományuk több pontjában, esetleg értelemzési tartományuk valamely részintervallumán differenciálhatók, sőt sok függvény a teljes értelmezési tartományán differenciálható. Az alábbiakban megadjuk az intervallumon való differenciálhatóság definícióját.

4.2. Definíció. *Az f függvényt az (a, b) intervallumon differenciálható függvénynek nevezzük, ha f az (a, b) intervallum minden pontjában differenciálható.*

4.3. Definíció. *Azt a függvényt, mely az (a, b) intervallum minden pontjához az f adott pontbeli deriváltját rendeli hozzá, az f függvény deriváltfüggvényének, vagy röviden deriváltjának nevezzük és f'-vel, vagy $\frac{df}{dx}$-szel jelöljük, s így*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in (a, b).$$

4.1. Példa. Legyenek a és b valós számok. Az $f(x) = ax + b$ függvény deriváltját a definícó segítségével a következőképpen számíthatjuk ki:

$$(ax + b)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) + b - ax - b}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x - x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a}{1} = a.$$

4.2. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény deriváltja a definícó segítségével így számítható ki:

$$(x^2)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{1} = 2x.$$

4.3. Példa. Az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény deriváltjának kiszámítása a definícó segítségével:

$$(\sqrt{x})'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{(\Delta x)(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4.4. Példa. Az $f(x)=\sin x$ függvény deriváltjának meghatározása a definícó segítségével:

$$(\sin x)'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=$$

$$=\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=1\cdot\cos x=\cos x.$$

4.5. Példa. Az $f(x)=\cos x$ függvény deriváltjának kiszámítása a definícó alapján:

$$(\cos x)'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x+\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=$$

$$=-\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{2x+\Delta x}{2}=-1\cdot\sin x=-\sin x.$$

4.6. Példa. Az $f(x)=a^x$ függvény deriváltját is ki lehet számítani a definícó segítségével. Legyen $a>0$, $a\neq 1$ és $x\in\mathbf{R}$. Ekkor

$$(a^x)'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

A levezetésben felhasználtuk a $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^t-1}{t}=a^t\ln a$ ismert határértéket.
Az $a=e$ speciális esetben azt kapjuk, hogy $(e^x)'=e^x$.

4.7. Példa. Az $f(x)=\ln x$ függvény deriváltja is kiszámítható a definícó segítségével. Ha $x>0$, akkor

$$(\ln x)'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x},$$

felhasználva a $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$ ismert határértéket.
Hasonlóan mutatható meg, hogy $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$.

Emlékezzünk vissza, hogy egy x_0 pontban folytonos f valós függvény mindig kielégíti a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

feltételt, amelyet a következő formában is felírhatunk:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Az így felírt feltétel láthatóan szükséges ahhoz, hogy az $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ differenciahányadosnak legyen véges határértéke $\Delta x \to 0$ esetén. Megfogalmazható tehát az alábbi állítás:

4.1. Tétel. *Ha az f valós függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor f folytonos is az x_0 pontban.*

Valamely függvény adott pontbeli folytonosságából nem következik e pontbeli differenciálhatósága, bár lehet differenciálható is.

4.8. Példa. Az $f(x) = |x|$ függvény $x = 0$ pontban folytonos, de nem differenciálható.

4.9. Példa. Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény $x = 0$ pontban folytonos és differenciálható is.

A differenciálhatóság tehát erősebb feltételt jelent, mint a folytonosság. Tételünk alapján világos, ha f az x_0 pontban nem folytonos, akkor ott nem is differenciálható.

4.1.3. Differenciálási szabályok

4.2. Tétel. *Ha az f függvény differenciálható az x pontban, akkor a cf függvény is differenciálható az x pontban, ahol k tetszőleges konstans, és*

$$[kf(x)]' = kf'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = kf(x)$. Ekkor

$$[kf(x)]' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kf(x + \Delta x) - kf(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = kf'(x).$$

◇

4.3. Tétel. *Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban, akkor $f + g$ összegük is differenciálható az x pontban, és*

$$(f + g)'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = f(x) + g(x)$. Ekkor

$$[f(x)+g(x)]' = F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-(f(x)+g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f'(x)+g'(x).$$

◇

4.4. Tétel. *Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban, akkor $f-g$ különbségük is differenciálható az x pontban, és*

$$(f-g)'(x) = [f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = f(x) - g(x)$. Ekkor

$$[f(x)-g(x)]' = F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-g(x+\Delta x)-(f(x)-g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f'(x)-g'(x).$$

◇

4.5. Tétel. *Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban, akkor fg szorzatuk is differenciálható az x pontban és érvényes, hogy:*

$$(fg)'(x) = [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = f(x)g(x)$. Ekkor

$$[f(x)g(x)]' = F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

◇

4.6. Tétel. *Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban és $g(x) \neq 0$, akkor a függvények $\frac{f}{g}$ hányadosa is differenciálható az x pontban és érvényes, hogy:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Ekkor

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{(\Delta x)g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{1}{(g(x))^2} \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

◇

4.10. Példa. Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény deriváltja a hányados deriváltjának szabálya segítségével így számítható ki:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4.11. Példa. Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltja is meghatározható a hányados deriváltjának szabálya segítségével:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4.7. Tétel. *Ha a g függvény differenciálható az x pontban és az f függvény differenciálható a $g(x)$ pontban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is differenciálható az x pontban és érvényes, hogy:*

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = f(g(x))$. Ekkor

$$[f(g(x))]' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{g(x+\Delta x)\to g(x)} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(g(x))g'(x),$$

ahol $g(x+\Delta x) \to g(x)$, ha $\Delta x \to 0$, mert g differenciálható az x pontban és emiatt folytonos is x-ben. $\diamond$

4.12. Példa. Legyen α tetszőleges valós szám. Ha $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, akkor

$$(x^\alpha)' = f'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

4.13. Példa. Mivel az összetett függvény deriválási szabálya szerint $(e^{-x})' = -e^{-x}$, ezért

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

4.14. Példa. Az $f(x) = \operatorname{th} x$ függvény deriváltja így számítható ki:

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

4.15. Példa. Az $f(x) = \operatorname{cth} x$ függvény deriváltja a következőképpen határozható meg:

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)'\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4.8. Tétel. *Az f függvény f^{-1} inverz függvénye differenciálható az x pontban, ha az f függvény differenciálható az $f^{-1}(x)$ pontban, ahol $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ és érvényes, hogy:*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonsága, hogy

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Meghatározva mindkét oldal deriváltját kapjuk az összetett függvény differenciálási szabálya alapján, hogy

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \left[f^{-1}(x)\right]' = 1.$$

Leosztás után következik, hogy

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

$\diamond$

A trigonometrikus függvények és a hiperbolikus függvények inverzeinek deriváltjait az előzőekben bemutatott képlet alapján számíthatjuk ki.

4.16. Példa. Ha $f(x) = \sin x$, akkor $f^{-1}(x) = \arcsin x$ és $f'(x) = \cos x$. Ekkor

$$(\arcsin x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Mivel $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ és $\sin(\arcsin x) = x$, ezért

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.17. Példa. Ha $f(x) = \cos x$, akkor $f^{-1}(x) = \arccos x$ és $f'(x) = -\sin x$. Ekkor

$$(\arccos x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Mivel $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ és $\cos(\arccos x) = x$, ezért

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos(\arccos x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.18. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{tg} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ és $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Ekkor

$$(\operatorname{arctg} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{(\cos(\operatorname{arctg} x))^2}} = (\cos(\operatorname{arctg} x))^2.$$

Az inverz függvény tulajdonsága alapján $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ és

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

ezért

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4.19. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{ctg} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$ és $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. Ekkor

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\frac{1}{(\sin(\operatorname{arcctg} x))^2}} = -(\sin(\operatorname{arcctg} x))^2.$$

Az inverz függvény tulajdonsága alapján $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ és

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x},$$

ezért

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + (\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x))^2} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

4.20. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{sh} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x$ és $f'(x) = \operatorname{ch} x$. Ekkor

$$(\operatorname{arsh} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)}.$$

Mivel $\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$ és $\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x) = x$, ezért

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ha a megfelelő área függvényt logaritmusos alakban írjuk fel, akkor a deriváltfüggvény a deriválási szabályok alkalmazásával is kiszámítható. Ebben az esetben

$$(\operatorname{arsh} x)' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4.21. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{ch} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arch} x$ és $f'(x) = \operatorname{sh} x$. Ekkor

$$(\operatorname{arch} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)}.$$

Mivel $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$ és $\operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) = x$, ezért

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{ch}(\operatorname{arch} x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

A másik módon:

$$(\operatorname{arch} x)' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2-1})\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

4.22. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{th} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arth} x$ és $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Ekkor

$$(\operatorname{arth} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{(\operatorname{ch}(\operatorname{arth} x))^2}} = (\operatorname{ch}(\operatorname{arth} x))^2.$$

Az inverz függvény tulajdonsága alapján $\operatorname{th}(\operatorname{arth} x) = x$ és

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{1} = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}}{\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x},$$

ezért

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1 - (\operatorname{th}(\operatorname{arth} x))^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

A másik módszerrel:

$$(\operatorname{arth} x)' = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1+x)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}.$$

4.23. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{cth} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arcth} x$ és $f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. Ekkor

$$(\operatorname{arcth} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\frac{1}{(\operatorname{sh}(\operatorname{arcth} x))^2}} = -(\operatorname{sh}(\operatorname{arcth} x))^2.$$

Az inverz függvény tulajdonsága alapján $\operatorname{cth}(\operatorname{arcth} x) = x$ és

$$-\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{-1} = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x} = \frac{\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}}{\frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{1 - \operatorname{cth}^2 x},$$

ezért

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1 - (\operatorname{cth}(\operatorname{arcth} x))^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

A másik módszerrel:

$$(\operatorname{arcth} x)' = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-2}{x-1} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Elemi függvények deriváltjainak táblázata

1. $(c)' = 0, \quad c = const.$

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}$

3. $(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbf{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

5. $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}$

6. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbf{R}$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

9. $(\operatorname{arcsin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

10. $(\operatorname{arccos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbf{R}$

14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbf{R}$

15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbf{R}$

16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

17. $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

18. $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$

19. $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$

20. $(\operatorname{arcth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ függvény deriváltját a definíció alapján.

Megoldás.

$$(2x^2 - 3x + 5)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 5 - (2x^2 - 3x + 5)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 2x^2 + 3x - 5}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x - 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x + 2\Delta x - 3}{1} = 4x - 3.$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 1$ függvény deriváltját a definíció alapján.

Megoldás. Az $f(x) = x^3 + 1$ függvény deriváltját a definícó segítségével így számíthatjuk ki:

$$(x^3 + 1)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 + 1 - x^3 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2}{1} = 3x^2.$$

3. Határozzuk meg az $f(x) = 3\sqrt{2x - 5}$ függvény deriváltját a definíció alapján.

Megoldás.

$$(3\sqrt{2x - 5})' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\sqrt{2(x + \Delta x) - 5} - 3\sqrt{2x - 5}}{\Delta x} =$$

$$= 3 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x + \Delta x) - 5} - \sqrt{2x - 5}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{2(x + \Delta x) - 5} + \sqrt{2x - 5}}{\sqrt{2(x + \Delta x) - 5} + \sqrt{2x - 5}} =$$

$$= 3 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x) - 5 - (2x - 5)}{(\Delta x)(\sqrt{2(x + \Delta x) - 5} + \sqrt{2x - 5})} =$$

$$= 3 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x + \Delta x) - 5} + \sqrt{2x - 5}} = \frac{3}{\sqrt{2x - 5}}.$$

Határozzuk meg a következő függvények deriváltját, alkalmazva az elemi függvények deriváltjainak táblázatát és a deriválási szabályokat.

4. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x - \pi$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x - \pi\right)' =$$

$$= 5x^4 - 3 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x + 1 = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 14x + 1.$$

5. $f(x) = \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{\sqrt{2}}{x^4}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{6}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{\sqrt{2}}{x^4}\right)' = \left(6x^{-2} - 5x^{-3} + \sqrt{2}x^{-4}\right)' =$$

$$= 6 \cdot (-2) \cdot x^{-3} - 5 \cdot (-3) \cdot x^{-4} + \sqrt{2} \cdot (-4) \cdot x^{-5} = -\frac{12}{x^3} + \frac{15}{x^4} - \frac{4\sqrt{2}}{x^5}.$$

6. $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{1}{4}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3}.$$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{\sqrt[5]{x^4}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^4}}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{4}{5}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 3 \cdot \frac{4}{5} \cdot x^{-\frac{1}{5}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{5\sqrt[5]{x}}.$$

8. $f(x) = x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$

Megoldás. Írjuk fel az irracionális kifejezést x hatványaként. Ekkor

$$f'(x) = \left(x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(x \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{12}}\right)' = \left(x^{\frac{23}{12}}\right)' = \frac{23}{12} \cdot x^{\frac{11}{12}} = \frac{23\sqrt[12]{x^{11}}}{12}.$$

9. $f(x) = \dfrac{a\sqrt{x} + \pi\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$, $a \in \mathbf{R}$

Megoldás. Bontsuk az adott függvényt két összeadandóra. Ekkor

$$f'(x) = \left(\frac{a\sqrt{x} + \pi\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \left(\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\pi\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \left(a \cdot x^{-\frac{1}{6}} + \pi x^{-\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= a \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot x^{-\frac{7}{6}} + \pi \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{a}{6x\sqrt[6]{x}} - \frac{\pi}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

10. $f(x) = xe^x$

Megoldás. Alkalmazzuk a szorzat deriválási szabályát. Ekkor

$$f'(x) = (xe^x)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x.$$

11. $f(x) = \left(\sqrt{x}+2\right)\sin x$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\left(\sqrt{x}+2\right)\sin x\right)' = \left(\sqrt{x}+2\right)'\sin x + \left(\sqrt{x}+2\right)(\sin x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x + \left(\sqrt{x}+2\right)\cdot\cos x = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \left(\sqrt{x}+2\right)\cos x.$$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+5}$

Megoldás. Alkalmazzuk a hányados deriválási szabályát. Ekkor

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^3+5}\right)' = \frac{(x^2)'(x^3+5) - x^2\cdot(x^3+5)'}{(x^3+5)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^3+5) - x^2\cdot 3x^2}{(x^3+5)^2} = \frac{2x^4+10x-3x^4}{(x^3+5)^2} = \frac{10x-x^4}{(x^3+5)^2} = \frac{x(10-x^3)}{(x^3+5)^2}.$$

13. $f(x) = \dfrac{2-\ln x}{2+\ln x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{2-\ln x}{2+\ln x}\right)' = \frac{(2-\ln x)'(2+\ln x) - (2-\ln x)(2+\ln x)'}{(2+\ln x)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}(2+\ln x) - (2-\ln x)\frac{1}{x}}{(2+\ln x)^2} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{2+\ln x+2-\ln x}{(2+\ln x)^2} = -\frac{4}{x(2+\ln x)^2}.$$

14. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\operatorname{tg} x) - \sin x(1+\operatorname{tg} x)'}{(1+\operatorname{tg} x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(1+\operatorname{tg} x) - \sin x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \frac{\cos x+\sin x-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\cos^3 x+\sin x\cos^2 x-\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^3 x+\sin x(\cos^2 x-1)}{1+\sin 2x} = \frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{1+\sin 2x}.$$

15. Számítsuk ki mennyi $f'(x_0)$ értéke, ha $f(x) = \dfrac{a-x}{1+x}$, $a \in \mathbf{R}$ és $x_0 = 1$.

Megoldás. Határozzuk meg először a függvény deriváltját:

$$f'(x) = \left(\frac{a-x}{1+x}\right)' = \frac{(a-x)'(1+x) - (a-x)(1+x)'}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{(-1)\cdot(1+x) - (a-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-a+x}{(1+x)^2} = -\frac{a+1}{(1+x)^2}.$$

Számoljuk most ki az f' függvény értékét 1-ben:

$$f'(1) = -\frac{a+1}{(1+1)^2} = -\frac{a+1}{4}.$$

Határozzuk meg a következő összetett függvények deriváltját.

16. $f(x) = (3x+4)^7$

Megoldás.

$$f'(x) = \left((3x+4)^7\right)' = 7 \cdot (3x+4)^6 \cdot (3x+4)' = 21(3x+4)^6.$$

17. $f(x) = \sqrt{3x^2+5x-4}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\sqrt{3x^2+5x-4}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+5x-4}} \cdot (3x^2+5x-4)' = \frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x-4}}.$$

18. $f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{x}\right)$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\arcsin\left(\frac{2}{x}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}}} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

19. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}\right)' = \left(\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(x+\sqrt{x}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\,(x+\sqrt{x})\,\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}.$$

20. $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1+x}{1+x+1-x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2\sqrt{1+x}}{4(1+x)\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

21. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\right)' = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{(-\cos x)(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1-\sin x}\cdot\frac{-\cos x-\sin x\cos x-\cos x+\sin x\cos x}{1+\sin x} =$$

$$= \frac{-2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{-2\cos x}{\cos^2 x} = -\frac{2}{\cos x}.$$

22. $f(x) = \dfrac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{3(1+x^2)} + \frac{(1-x^2)^2}{1-2x^2+x^4+x^2}\cdot\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{3(1+x^2)} + \frac{1+x^2}{3(1-x^2+x^4)} = \frac{1+x^4}{1+x^6}.$$

23. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - \ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)' =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot x - 1 - \sqrt{x^2+1}}{x^2} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x^2-\sqrt{x^2+1}-x^2-1}{x\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

24. $f(x) = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2} - x\arcsin x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{(1-x^2)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + x^2\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

25. Mutassuk meg, hogy az $y = \ln\dfrac{1}{1+x}$ függvény kielégíti az $xy' + 1 = e^y$ összefüggést.

Megoldás. Határozzuk meg először az adott függvény deriváltját, majd mutassuk meg, hogy az kielégíti a megadott összefüggést. Mivel

$$y' = \left(\ln\frac{1}{1+x}\right)' = (1+x)\cdot\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) = -\frac{1}{1+x},$$

ezért behelyettesítve adódik, hogy

$$x\cdot\left(-\frac{1}{1+x}\right) + 1 = e^{\ln\frac{1}{1+x}},$$

majd rendezés után

$$\frac{-x+1+x}{1+x} = \frac{1}{1+x}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}.$$

26. Mutassuk meg, hogy az $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény kielégíti az $(1-x^2)y' - xy = 1$ összefüggést.

Megoldás. Mivel

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} - \arcsin x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1 + \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

így ezt a megadott összefüggésbe helyettesítve a következőket kapjuk:

$$(1-x^2)\cdot\frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 1,$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x - x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \quad \text{azaz} \quad 1 = 1.$$

27. Határozzuk meg az $f(x) = 4 - x^2$ parabola érintőjének és merőleges egyenesének egyenletét az x-tengellyel alkotott metszéspontjaiban.

Megoldás. Az f függvény és az x-tengely metszetei az f függvény nullái, azaz azok a pontok, melyek kielégítik a $4 - x^2 = 0$ egyenletet. Ezek az $x = -2$ és $x = 2$ pontok. Az f görbe érintőjének egyenlete az x_0 pontban

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

az f görbe merőleges egyenesének egyenlete az x_0 pontban pedig

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Az f függvény első deriváltja $f'(x) = -2x$, így $f'(-2) = 4$ és $f'(2) = -4$.

Tehát a parabola érintőjének egyenlete a $(-2, 0)$ pontban $y = 4x+8$, a $(2, 0)$ pontban pedig $y = -4x + 8$. A parabola merőleges egyenesének egyenlete a $(-2, 0)$ pontban $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, a $(2, 0)$ pontban pedig $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

28. Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ görbe azon pontjait, melyekben a görbe érintője párhuzamos az $y = 2x - 3$ egyenessel.

Megoldás. Az f görbe érintőjének iránytényezője az x_0 pontban $f'(x_0)$. Mivel a párhuzamos egyeneseknek egyenlő iránytényezőik vannak, így következik, hogy $f'(x_0) = 2$. Felhasználva, hogy $f'(x) = \frac{1}{x}$, az $\frac{1}{x_0} = 2$ egyenletből kapjuk, hogy $x_0 = \frac{1}{2}$, illetve a keresett pont $P\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2}\right)$.

29. Milyen szög alatt metszi az $y = \sin x$ görbe az x-tengelyt?

Megoldás. A keresett szög a görbe x-tengellyel alkotott metszetéhez tartozó érintő és az x-tengely által alkotott szög. Az $y = \sin x$ görbe az x-tengelyt az $x = k\pi$ pontokban metszi, ahol $k \in \mathbf{Z}$. A görbe x_0 pontjához tartozó érintőjének és az x-tengely által közbezárt φ szögekre érvényes, hogy $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$, ebből

$$\operatorname{tg}\varphi = \cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \end{cases}$$

illetve

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ \operatorname{arctg}(-1), & \text{ha } k \text{ páratlan,} \end{cases} = \begin{cases} \pi/4, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 3\pi/4, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Tehát a keresett szögek: $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{3\pi}{4}$ nagyságúak.

30. Keressük meg az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ parabolának azt az érintőjét, amely merőleges az $y = -\frac{1}{2}x - 1$ egyenesre.

Megoldás. Mivel az $y = -\frac{1}{2}x - 1$ egyenes iránytényezője $-\frac{1}{2}$, ezért a rá merőleges érintő iránytényezője 2. Ugyanakkor az érintő iránytényezője $f'(x_0) = 2x_0 + 3$, tehát $2x_0 + 3 = 2$, ahonnan $x_0 = -\frac{1}{2}$. A parabola $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ pontbeli érintőjének egyenlete $y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$, illetve $y = 2x - \frac{17}{4}$.

4.1.4. A differenciál fogalma

4.4. Definíció. *Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor az $f'(x_0)(x-x_0)$ lineáris kifejezést az f függvény x_0 pontbeli differenciáljának nevezzük. Jelölése: $df|_{x=x_0}$ vagy röviden df, tehát*

$$df = f'(x_0)(x - x_0).$$

Speciálisan az $f(x) = x$ hozzárendelési szabállyal megadott f függvényre:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

minden $x_0 \in D_f$-re, így

$$df = dx = 1(x - x_0),$$

azaz $dx = x - x_0$. Az $x - x_0$ különbség a független változó növekménye, jelölése pedig $\Delta x = x - x_0$. Az $f(x) - f(x_0)$ különbség a függvényérték növekménye, jelölése pedig $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Mondható tehát, hogy a független változó differenciálja megegyezik a növekményével, amíg a függvényérték differenciálja az x_0 helyen: $df = f'(x_0)dx$ általában nem egyezik meg a Δf-fel. Gyakran hasznos, ha ismerjük a derivált alábbi definícióját is, hiszen az x_0 helyhez tartozó df és Δf között a kapcsolatot pont ez a definíciója adja meg:

4.5. Definíció. *Legyen f függvény az x_0 valamely környezetében értelmezve. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható x_0-ban, ha létezik olyan szám, hogy minden olyan x-re, amely eleme e környezetnek, az*

$$f(x) - f(x_0) = c(x - x_0) + h(x)(x - x_0)$$

összefüggés felírható, ahol $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$. Ekkor $c = f'(x_0)$.

Igaz tehát, hogy

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0),$$

ahol $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$, azaz felírható, hogy

$$\Delta f = f'(x_0)dx + h(x)dx, \quad \text{illetve} \quad \Delta f = df + h(x)dx,$$

ahonnan belátható, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \Delta f = df.$$

Sőt a $\Delta f - df$ különbség elhanyagolhatóan kicsivé válik dx-hez képest, miközben $x \to x_0$, azaz

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f - df}{dx} = \lim_{x \to x_0} h(x) = 0.$$

A fent elmondottak geometriai jelentése a következő: df jelenti az f függvény ordinátaértékének megváltozását $f(x_0)$-tól az érintőig, míg Δf ugyancsak $f(x_0)$-tól, de a függvény görbéjéig, miközben az x_0 helyről áttérünk az $x_0 + \Delta x$ helyre. Viszont, ha $x \to x_0$ (azaz $dx \to 0$) df egyre inkább (sőt minden határon túl) megközelíti Δf-et, azaz $\Delta f \approx df$.

4.1.5. Magasabb rendű differenciálhányadosok

4.6. Definíció. *Ha az f és f' függvények differenciálhatók az x_0 pontban, akkor az f' függvény x_0 pontban vett deriváltját az f függvény x_0 pontban vett második deriváltjának nevezzük és $f''(x_0)$ szimbólummal jelöljük. A második deriváltnak ugyancsak gyakran használt jelölése:*

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}.$$

Analóg módon jutunk el a magasabb rendű, illetve n-edrendű deriváltak fogalmához. Jelölésük:

$$f'(x_0),\ f''(x_0),\ f'''(x_0),\ f^{(4)}(x_0),\ \dots,\ f^{(n)}(x_0),\ \dots$$
$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0},\ \dots,\ \left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_0},\ \dots$$

Ezek után definiáljuk a függvény magasabbrendű (n-edrendű) deriváltfüggvényét.

4.7. Definíció. *Ha az f függvény differenciálható a H_1 halmazon ($H_1 = D_f$) és az f' függvény differenciálható a H_2 halmazon ($H_2 \subset H_1$), akkor f' deriváltfüggvényét, amelyet f''-vel jeölünk, nevezzük az f függvény másodrendű deriváltfüggvényének. Hasonló módon jutunk el az n-edrendű deriváltfüggvény fogalmához. Jelölésük:*

$$f',\ f'',\ f''',\ f^{(4)},\ \dots,\ f^{(n)},\ \dots$$

vagy

$$\frac{df}{dx},\ \frac{d^2f}{dx^2},\ \dots,\ \frac{d^nf}{dx^n},\ \dots$$

Szokás még az f függvény nulladik deriváltjáról is beszélni. A függvény nulladik deriváltja alatt magát a függvényt értjük, vagyis

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0), \quad \text{illetve} \quad f^{(0)} = f.$$

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ függvény harmadik deriváltját.

Megoldás. $f'(x) = 6x + 5$, $f''(x) = 6$, $f'''(x) = 0$.

2. Létezik-e az $f(x) = x^4$ függvény századik deriváltja?

Megoldás. Mivel $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$, valamint $f^{(5)}(x) = 0$, így a függvény századik deriváltja is létezik és $f^{(100)}(x) = 0$.

3. Határozzuk meg az $f(x) = e^{2x}$ függvény n-edik deriváltját, ha $n \in \mathbf{N}$.

Megoldás. Számoljunk ki annyi deriváltat, amennyiből általánosíthatunk:

$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad f''(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}, \quad f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3e^{2x}.$$

Megállapíthatjuk, hogy $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$.

4. Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvény n-edik deriváltját, ha $n \in \mathbf{N}$.

Megoldás. Mivel

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1!}{x^2}, \quad f'''(x) = -(-2)x^{-3} = \frac{2!}{x^3},$$

$$f^{(4)}(x) = 2 \cdot (-3)x^{-4} = -\frac{3!}{x^4}, \quad f^{(5)}(x) = -6 \cdot (-4)x^{-5} = \frac{4!}{x^5}.$$

Megállapíthatjuk, hogy $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

5. Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény n-edik deriváltját, ha $n \in \mathbf{N}$.

Megoldás. Mivel

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x.$$

Megállapíthatjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{n=4k,} \\ \cos x, & \text{n=4k+1,} \\ -\sin x, & \text{n=4k+2,} \\ -\cos x, & \text{n=4k+3,} \end{cases} \quad \text{azaz} \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{n=4k,} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & \text{n=4k+1,} \\ \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), & \text{n=4k+2,} \\ \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), & \text{n=4k+3,} \end{cases}$$

vagyis $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

4.2. A differenciálszámítás alkalmazása

4.2.1. A differenciálszámítás középértéktételei

4.9. Tétel. *(Fermat-tétel) Legyen a $(c-\delta, c+\delta)$ intervallum a $c \in \mathbf{R}$ pont δ-környezete, az $f : (c-\delta, c+\delta) \to \mathbf{R}$ függvény pedig differenciálható a c pontban. Ha az f függvénynek a c pontban helyi szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a c pontban helyi maximuma van, azaz legyen minden $x \in (c-\delta, c+\delta)$ esetén $f(x) \le f(c)$. A derivált definíciója szerint

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

ahol a határérték nem függ attól, hogy az x jobbról vagy balról tart-e a c-hez. Ha $x > c$, akkor

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0,$$

s áttérve a határátmenetre $(x \to c + 0)$ azt kapjuk, hogy $f'(c) \le 0$.
Ha viszont $x < c$, akkor

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0,$$

s kiszámítva a határértéket $(x \to c - 0)$ azt kapjuk, hogy $f'(c) \ge 0$. A differenciálhatóság miatt mindkét állítás igaz, s ez csak $f'(c) = 0$ mellett lehetséges, amit valójában szerettünk volna belátni. $\diamond$

4.10. Tétel. *(Rolle-tétel) Legyen az* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvény*
a) *folytonos az* $[a, b]$ *intervallumon,*
b) *differenciálható* (a, b) *intervallumon és*
c) $f(a) = f(b)$*, azaz az* $[a, b]$ *intervallum végpontjaiban a függvényértékek megegyeznek.*
Ekkor létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$*, ahol* $f'(\xi) = 0$*.*

Bizonyítás. Az *a)* feltételből és a megfelelő tételből következik, hogy folytonos függvény zárt intervallumon felveszi maximumát és minimumát, tehát van az $[a, b]$ intervallumon legalább egy olyan hely, ahol az f függvény felveszi legnagyobb M értékét, továbbá van legalább egy olyan hely, ahol az f függvény felveszi legkisebb m értékét. Két eset lehetséges.
I. A két abszolút szélsőérték közül legalább az egyiket a függvény az (a, b) intervallumon veszi fel, azaz $m < M$, s legyen ξ ez a pont, $a < \xi < b$. A ξ pont egyben helyi szélsőértéket is jelent, tehát a Fermat-tétel alapján $f'(\xi) = 0$.
II. Az f függvény abszolút minimumát és maximumát az $[a, b]$ intervallum végpontjaiban veszi fel. Ebben az esetben a *c)* feltétel miatt $m = M$. Ha most az f függvénynek megegyezik a legkisebb és legnagyobb értéke az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f(x) = konstans$, $x \in [a, b]$, s így az (a, b) intervallum minden ξ, $a < \xi < b$ pontjára igaz, hogy $f'(\xi) = 0$.
Ezzel a Rolle-tételt bebizonyítottuk. $\diamond$

A Rolle tétel geometriai jelentése: az $f'(\xi) = 0$ azt jelenti, hogy a szóban forgó helyen a függvény görbéjéhez húzott érintő párhuzamos az x tengellyel.
A tételnek van egy, a szélsőérték-vizsgálatban nagyon lényeges következménye:

4.1. Következmény. *Ha egy függvény olyan pontban veszi fel a szélsőértékét, ahol differenciálható, akkor ott a derivált értéke zérus.*

Ez az állítás nem fordítható meg, azaz az első derivált zérus volta csak szükséges feltétele a szélsőérték létezésének.

4.24. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^5$ függvényt az $x_0 = 0$ pontban. $f'(x) = 5x^4$, $f'(x_0) = f'(0) = 0$, és még sincs f-nek szélsőértéke $x_0 = 0$ pontban.

A fentiek nem azt jelentik, hogy csak differenciálható függvénynek létezik szélsőértéke.

4.25. Példa. Az $f(x) = |x|$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban minimuma van, holott a függvény itt nem differenciálható.

4.11. Tétel. *(Langrange-tétel) Legyen az* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvény*
a) *folytonos az* $[a, b]$ *intervallumon és*
b) *differenciálható az* (a, b) *intervallumon.*
Ekkor létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$*, ahol*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. Legyen $y = g(x)$ az $y = f(x)$ görbe $P_1(a, f(a))$ és $P_2(b, f(b))$ pontjain áthaladó szelő egyenlete, ahol

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Definiáljuk a $h(x) = f(x) - g(x)$ segédfüggvényt és igazoljuk, hogy a h függvényre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei.
a) A h függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, mert az f és g függvények is folytonosak az $[a, b]$ intervallumon, így $f - g$ különbségük is folytonos.
b) A h függvény differenciálható az (a, b) intervallumon, mert az f és g függvények is differenciálhatók az $[a, b]$ intervallumon, így $f - g$ különbségük is differenciálható.
c) Mivel $h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) = 0$ és $h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(b) = 0$, ezért $h(a) = h(b)$, azaz teljesülnek a a Rolle-tétel feltételei. Ekkor létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$ pont, ahol $h'(\xi) = 0$. Mivel

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

így a Rolle-tétel állítása szerint

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \quad \text{azaz} \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ezzel a Lagrange-tételt bebizonyítottuk. $\diamond$

A tétel állítása geometriailag azt jelenti, hogy van olyan ξ pont, amelyhez tartozó érintő meredeksége megegyezik az a és b helyekhez tartozó pontokon átmenő szelő meredekségével. E tételből adódik a következő állítás:

4.12. Tétel. *Legyen az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény*
a) *folytonos az $[a, b]$ intervallumon,*
b) *differenciálható az (a, b) intervallumon,*
c) *tetszőleges $x \in (a, b)$ pontra $f'(x) = 0$.*
Ekkor $f(x) = const.$ a teljes $[a, b]$ intervallumon.

Ezt kézzelfoghatóbban úgy is megfogalmazhatjuk, hogy csak a konstans értékű függvény az a függvény, amelynek deriváltja azonosan zérus valamely intervallumon.

4.13. Tétel. *(Cauchy-tétel) Legyenek az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ és a $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvények*
a) *folytonosak az $[a, b]$ intervallumon,*
b) *differenciálhatók az (a, b) intervallumon és*
c) *tetszőleges $x \in (a, b)$ pontra $g'(x) \neq 0$.*
Ekkor létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$, ahol

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás. Definiáljuk a $h(x) = f(x) + \lambda g(x)$ segédfüggvényt, ahol λ egy később megválasztandó konstans. Igazoljuk, hogy meg lehet adni a λ konstans olyan értékét, hogy a h függvényre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei.
a) A h függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, mert az f és g függvények is folytonosak az $[a, b]$ intervallumon, így $f + \lambda g$ lineáris kombinációjuk is folytonos.
b) A h függvény differenciálható az (a, b) intervallumon, mert az f és g függvények is differenciálhatók az $[a, b]$ intervallumon, így $f + \lambda g$ lineáris kombinációjuk is differenciálható.

c) $h(a) = f(a) + \lambda g(a)$ és $h(b) = f(b) + \lambda g(b)$ miatt $h(a) = h(b)$ akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b), \quad \text{azaz} \quad \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Természetesen $g(b) \neq g(a)$, mert különben a Rolle-tétel értelmében az (a, b) intervallumon a g' függvénynek lenne nullahelye, ami ellentmondana a Cauchy-tétel *c)* feltételének. Tehát létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$ pont, ahol $h'(\xi) = 0$, azaz $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$, s ekkor

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Ezzel a Cauchy-tételt bebizonyítottuk. $\diamond$

Könnyű belátni, hogy a Cauchy-tétel a Langrange-tétel általánosítása, hiszen speciális esetben, amikor $g(x) = x$, akkor $g'(x) = 1$. Az is észrevehető, hogy a Langrange-tétel viszont a Rolle-tétel általánosítása.
A Rolle-, a Langrange- és a Cauchy-tétel mindegyike ún. egzisztencia tétel, azaz e tételek csak annyit állítanak, hogy létezik legalább egy - egy a szóban forgó tulajdonságokkal rendelkező hely az (a, b) intervallumban. E tételek azonban sem az ilyen tulajdonságú helyek számáról, sem arról, hogy ezek pontosan hol helyezkednek el az (a, b) intervallumban, nem adnak felvilágosítást.

4.2.2. A Taylor-formula

4.8. Definíció. *Legyen az f függvény az $x = x_0$ helyen legalább n-szer differenciálható. Ekkor a*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

polinomot az f függvény $x = x_0$ helyhez tartozó n-edfokú Taylor-polinomjának nevezzük.

Ha n elég nagy, akkor a T_n polinom az $x = x_0$ hely környezetében jól közelíti az f függvényt.
Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-polinomot Maclaurin-polinomnak mondjuk. Ennek alakja:

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

A Taylor-polinom szerkezetéből látható, hogy $T_n(x_0) = f(x_0)$. Ha viszont $x \neq x_0$, akkor már $T_n(x) \approx f(x)$. Jelölje $f(x)$ és $T_n(x)$ különbségét, azaz a maradéktagot $R_n(x)$, vagyis legyen

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Belátható, hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

ahol ξ az x_0 és x értékek között van. Itt nyilván azt feltételezzük, hogy f legalább $(n+1)$-szer differenciálható. Ha a maradéktag elég kicsi, akkor $T_n(x)$ értéke jó közelítést ad az $f(x)$ függvényértékre. Ez az állítás azért is nagy fontosságú, mert segítségével bonyolult függvényeket meg tudunk közelíteni könnyen kezelhető függvényekkel, nevezetesen polinomokkal, amelyek grafikonjai a megfigyelt pont környezetében hozzásimulnak a szóban forgó függvény grafikonjához.

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x) = e^x$ függvény n-edfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 2$ pont környezetében.

Megoldás. Az f függvény n-edfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 2$ pont környezetében a

$$T_n(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

képlettel adott. Mivel

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

így

$$f'(2) = f''(2) = f'''(2) = \cdots = f^{(n)}(2) = e^2,$$

a keresett polinom pedig

$$T_n(x) = e^2 + \frac{e^2}{1!}(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + ... + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n,$$

vagyis

$$T_n(x) = e^2\left(1 + \frac{(x-2)}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + ... + \frac{(x-2)^n}{n!}\right).$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény hetedfokú Taylor-polinomját az $x_0 = \pi$ pont környezetében.

Megoldás. Mivel

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x,$$

így a megfelelő függvényértékek

$$f'(\pi) = \cos\pi = -1,\ f''(\pi) = -\sin\pi = 0,\ f'''(\pi) = -\cos\pi = 1,\ f^{(4)}(\pi) = \sin\pi = 0.$$

Általánosítva a fenti esetekből adódik, hogy

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{n=2k,} \\ (-1)^{k+1}, & \text{n=2k+1,} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

a keresett függvény Taylor-polinomja pedig

$$T_7(x) = 0 + \frac{(-1)}{1!}(x-\pi) + 0 + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 + 0 + \frac{(-1)}{5!}(x-\pi)^5 + 0 + \frac{1}{7!}(x-\pi)^7,$$

illetve

$$T_7(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - \frac{1}{120}(x-\pi)^5 + 0 + \frac{1}{5040}(x-\pi)^7.$$

Megállapíthatjuk, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény Taylor-polinomjában csak páratlan kitevőjű hatványok szerepelnek, ami biztosítja azt, hogy a megfelelő Taylor-polinom is páratlan legyen, mint maga a függvény.

3. Határozzuk meg az $f(x) = \cos x$ függvény hetedfokú Maclaurin-polinomját.

Megoldás. Mivel

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x,$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x, \quad f^{(5)}(x) = -\sin x, \quad f^{(6)}(x) = -\cos x, \quad f^{(7)}(x) = \sin x,$$

így a megfelelő függvényértékek

$$f(0) = \cos 0 = 1,\ f'(0) = -\sin 0 = 0,\ f''(0) = -\cos 0 = -1,\ f'''(0) = \sin 0 = 0,$$
$$f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1,\ f^{(5)}(0) = -\sin 0 = 0,$$
$$f^{(6)}(0) = -\cos 0 = -1,\ f^{(7)}(0) = \sin 0 = 0.$$

A keresett függvény Maclaurin-polinomja pedig

$$M_7(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6, \quad \text{illetve} \quad M_7(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6.$$

Megállapíthatjuk, hogy az $f(x) = \cos x$ függvény Maclaurin-polinomjában csak páros kitevőjű hatványok szerepelnek, ami biztosítja azt, hogy a megfelelő Taylor-polinom is páros legyen, mint maga a függvény.

4. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ függvény ötödfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ pont környezetében.

Megoldás. Az f függvény ötödfokú Taylor-polinomja az $x_0 = 0$ pont környezetében nem más mint a függvény ötödfokú Maclaurin-polinomja

$$M_5(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5.$$

Az f függvény első öt deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}(-x)') = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}(-x)') = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Ezért $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 1$ és $f'(0) = f'''(0) = f^{(5)}(0) = 0$, így

$$M_5(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

5. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ függvény Maclaurin-polinomját $n = 5$ esetén.

Megoldás. Az f függvény Maclaurin-formulája

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Mivel

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = ((1-x)^{-1})' = -(1-x)^{-2}(1-x)' = (1-x)^{-2},$$

$$f''(x) = ((1-x)^{-2})' = -2(1-x)^{-3}(1-x)' = 2(1-x)^{-3},$$

$$f'''(x) = (2(1-x)^{-3})' = -2 \cdot 3(1-x)^{-4}(1-x)' = 3!(1-x)^{-4},$$

$$f^{(4)}(x) = (6(1-x)^{-4})' = -3! \cdot 4(1-x)^{-5}(1-x)' = 4!(1-x)^{-5},$$

$$f^{(5)}(x) = (24(1-x)^{-5})' = -4! \cdot 5(1-x)^{-5}(1-x)' = 5!(1-x)^{-5},$$

így $f(0) = 1$, $f'(0) = 1 = 1!$, $f''(0) = 2 = 2!$, $f'''(0) = 3!$, $f^{(4)}(0) = 4!$ és $f^{(5)}(0) = 5!$. Ekkor

$$M_5(x) = 1 + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \frac{4!}{4!}x^4 + \frac{5!}{5!}x^5,$$

illetve

$$M_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5.$$

4.2.3. L'Hospital-szabály

Gyakran előfordul, hogy két olyan függvény hányadosának a határértékét kell meghatározni, amelyeknek a határértéke egyaránt nulla vagy egyaránt végtelen. Az ilyen határértékek kiszámítására ad egyszerű módszert az alábbi tétel (szabály).

4.14. Tétel. *(L'Hospital-szabály) Legyenek f és g az $x = x_0$ hely környezetében differenciálható függvények. Ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

feltéve, hogy a jobb oldalon szereplő (véges vagy végtelen) határérték létezik.

A fenti határértéket $\frac{0}{0}$ határozatlan típusú határértéknek nevezzük.
A tétel akkor is érvényes, ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Ilyenkor $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan típusú határértékről beszélünk. A tétel akkor is alkalmazható, ha $x_0 = \infty$ vagy $x_0 = -\infty$.
A L'Hospital-szabállyal kiszámíthatók a $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 és 1^∞ típusú határértékek is, ha azokat előzetesen sikerül $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusúra visszavezetni, s a segítségükkel egyszerűbben meghatározhatunk összetettebb határértékeket is.

FELADATOK

Számítsuk ki a következő határértékeket.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

Megoldás. A megadott határérték $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7} = \frac{3-4-1}{3-7} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Megoldás. A megadott határérték $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés. Ugyanakkor tudjuk, hogy 1-gyel egyenlő, mivel alaphatárértékként alkalmaztuk a trigonometrikus függvények határérték számításánál. Mutassuk meg, hogy milyen egyszerű ennek a határértéknek a kiszámítása a L'Hospital-szabály alkalmazásával. Ekkor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

Megoldás. A megadott határérték $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}\cdot 1 = -\frac{1}{3}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-7^x}{x}$

Megoldás. Mivel $3^0=7^0=1$, így $\dfrac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezésről van szó. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-7^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3-7^x\ln 7}{1}=\ln 3-\ln 7=\ln\frac{3}{7}.$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

Megoldás. A megadott határérték $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés. Alkalmazzuk rá kétszer a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\frac{\infty}{2}=\infty.$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{2^x}$

Megoldás. Mivel a határérték $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés, a L'Hospital-szabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2^x\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x2^x\ln 2}=\frac{1}{\infty}=0.$$

7. $\lim\limits_{x\to+0}\left(x\ln^2 x\right)$

Megoldás. A határérték $0\cdot\infty$ típusú határozatlan kifejezés, ezért $\dfrac{0}{0}$ vagy $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezésre kell hozni ahhoz, hogy alkalmazni lehessen a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to+0}\left(x\ln^2 x\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(2x)=0.$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}xe^{\frac{1}{x}}$

Megoldás. A határérték $0\cdot\infty$ típusú határozatlan kifejezés, ezért átalakítjuk és alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 0}xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=e^{\infty}=\infty.$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

Megoldás. A határérték $\infty - \infty$ típusú határozatlan kifejezés, amelyet közös nevezőre hozva átalakíthatunk $\frac{0}{0}$ típusúra. Ekkor már alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt. Így

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x + x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{5}{x^2+x-6}\right)$

Megoldás. A határérték $\infty - \infty$ típusú határozatlan kifejezés, amelyet közös nevezőre hozva átalakíthatunk $\frac{0}{0}$ típusúra. Ekkor már alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt. Így

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+3-5}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{5}.$$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Megoldás. A határérték $\infty - \infty$ típusú határozatlan kifejezés, amelyet közös nevezőre hozva átalakíthatunk $0\cdot\infty$, majd $\frac{0}{0}$ típusúra. Ilyen formában már alkalmazható a L'Hospital-szabály és

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{x}{x+1}}{\frac{-2}{x}}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

12. $\lim\limits_{x\to+0}x^x$

Megoldás. A határérték 0^0 típusú határozatlan kifejezés. Legyen

$$\lim_{x\to+0}x^x=H.$$

Logaritmáljuk a fenti egyenlőség mindkét oldalát. Ekkor

$$\ln\left(\lim_{x\to+0}x^x\right)=\ln H.$$

Rendezve a baloldalt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+0}(\ln x^x)=\ln H,\quad\text{azaz}\quad\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln x)=\ln H.$$

A baloldali határérték most $0 \cdot \infty$ típusú határozatlan kifejezés, ezért átalakítjuk és alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\ln H = \lim_{x \to +0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to +0} (-x) = 0,$$

ahonnan $H = e^0 = 1$, illetve a keresett határérték $\lim\limits_{x \to +0} x^x = 1$.

13. $\lim\limits_{x \to +0} (\cos 2x)^{\frac{5}{x}}$

Megoldás. 1^∞ típusú határozatlan kifejezésről van szó. Legyen

$$H = \lim_{x \to +0} (\cos 2x)^{\frac{5}{x}},$$

majd logaritmáljuk a fenti egyenlőség mindkét oldalát. Ekkor

$$\ln H = \ln \left(\lim_{x \to +0} (\cos 2x)^{\frac{5}{x}} \right) = \lim_{x \to +0} \left(\ln (\cos 2x)^{\frac{5}{x}} \right) = \lim_{x \to +0} \left(\frac{5}{x} \cdot \ln (\cos 2x) \right) =$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{\ln \cos 2x}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2}{1} = -10 \lim_{x \to +0} \operatorname{tg} 2x = -10 \cdot 0 = 0.$$

Ebből $H = e^0 = 1$, illetve $\lim\limits_{x \to +0} (\cos 2x)^{\frac{5}{x}} = 1$.

14. $\lim\limits_{x \to +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Megoldás. A határérték ∞^0 típusú határozatlan kifejezés. Legyen most

$$H = \lim_{x \to +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}},$$

majd logaritmáljuk a fenti egyenlőség mindkét oldalát. Hasonló eljárással, mint az előző két feladatban kapjuk, hogy

$$\ln H = \ln \left(\lim_{x \to +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \right) = \lim_{x \to +0} \left(\ln (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \right) = \lim_{x \to +0} \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \ln (\operatorname{ctg} x) \right).$$

A kapott határérték most $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés, ezért átalakítjuk és alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt.

$$\ln H = \lim_{x \to +0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= - \lim_{x \to +0} \frac{x}{\sin x \cos x} = - \lim_{x \to +0} \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = -1.$$

Ezért $H = e^{-1} = \frac{1}{e}$, illetve $\lim\limits_{x \to +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{e}$.

15. Indokoljuk meg, hogy miért nem alkalmazható a L'Hospital-szabály a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{x}$ határérték kiszámítására.

Megoldás. A határérték $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés, s a L'Hospital-szabályt alkalmazva a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{1} = \lim_{x\to+\infty} (1-\cos x)$$

határértéket kapjuk, amely nem létezik, hiszen nem tudjuk, hogy $\cos x$ a $[-1,1]$ intervallumból melyik értéket veszi fel.

4.2.4. A függvény monotonitása és szélsőértékei

Az alábbi állítás a Lagrange-tétel egyik következménye és a differenciálható függvények monotonitásának elégséges feltételét adja meg.

4.15. Tétel. *Ha az f differenciálható függvény növekszik (csökken) az (a,b) intervallumon, akkor $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) minden $x \in (a,b)$ pontra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvény növekszik az (a,b) intervallumon. Legyen $x \in (a,b)$ tetszőleges pont. Ekkor $x+\Delta x \in (a,b)$ mellett igaz, hogy

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

attól függetlenül, hogy Δx pozitív vagy negatív. Ebből következik, hogy

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Hasonlóan mutatható meg, hogy $f'(x) \leq 0$, amennyiben az f függvény csökken. ◇

Ezen tétel és a konstans függvény differenciálhányadosának ($(const)' = 0$) következményeként, megfogalmazhatjuk a deriválható függvény valamely intervallumon való szigorú monotonitásának szükséges és elégséges feltételét, amely jól használható a feladatok megoldása során.

4.2. Következmény. *Ha f az (a,b)-n differenciálható és minden $x \in (a,b)$ pontra $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), akkor f az (a,b) intervallumon szigorúan növekvő (csökkenő).*

Most pedig rátérünk a differenciálható függvények lokális szélsőértékének vizsgálatára. Ha $f'(x_0) = 0$, akkor az f függvénynek x_0 pontban lehet, de nem biztos, hogy van szélsőértéke. Ha $f'(x_0) \neq 0$, akkor az f függvénynek x_0-ban nincs szélsőértéke. Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásait az f függvény stacionárius pontjainak nevezzük. Ez azt jelenti, hogy a differenciálható f függvény lokális szélsőérték helyeit az f függvény stacionárius pontjai között kell keresni.
A következőkben a differenciálható függvények szélsőértékének létezésére mondunk ki elégséges feltételeket.

4.16. Tétel. *Ha f differenciálható az x_0 valamely környezetében és $f'(x_0) = 0$, akkor ahhoz, hogy a függvénynek az x_0 helyen lokális szélsőértéke legyen elegendő, hogy az f' függvény az x_0 helyen előjelet váltson.*

Gyorsabb és kényelmesebb a helyi szélsőértéket a második derivált segítségével meghatározni. Ennek lehetőségét biztosítja a következő állítás.

4.17. Tétel. *Ha f az x_0 helyen kétszer differenciálható és $f'(x_0) = 0$, akkor az x_0 helyen való lokális maximum (minimum) létezéséhez elegendő, hogy $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$) legyen.*

Ha az f függvény olyan, hogy $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, akkor a lokális szélsőérték létezéséről e tételek alapján nem mondhatunk semmit. A következő tétel segít az ilyen jellegű problémák megoldásában.

4.18. Tétel. *Legyen az f függvény az x_0 helyen n-szer differenciálható és*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

továbbá $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ekkor az f függvénynek az x_0 helyen akkor és csak akkor van helyi (lokális) szélsőértéke, ha n páros szám.

FELADATOK

1. Vizsgáljuk ki az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ függvény monotonitását és határozzuk meg a helyi szélsőértékeit.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, és szélsőértékeit az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai, a stacionárius pontok között kell keresni. A függvény első deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

a megfelelő egyenlet pedig

$$f'(x) = 0, \quad \text{azaz} \quad 3(x^2 - 4x + 3) = 0,$$

amelynek megoldásai, illetve a stacionárius pontok $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$. Hogy a stacionárius pontokban van-e a függvénynek szélsőértéke, az meghatározható a függvény monotonitási tulajdonságaiból is. Ezért az f' függvény előjelének vizsgálatával határozzuk meg az f függvény monotonitását. Foglaljuk táblázatba a kivizsgálást.

D_f	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

A mellékelt táblázat alapján az f függvény monoton növekvő a $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ intervallumon és monoton csökkenő az $(1, 3)$ intervallumon.

A táblázatból azt is leolvashatjuk, hogy a monotonitási tulajdonság szerint az f függvénynek $x_1 = 1$-ben maximuma, $x_2 = 3$-ban pedig minimuma van. Ugyanakkor a megfelelő függvényértékek:

$$f_{max}(1) = 0 \quad \text{és} \quad f_{min}(3) = -4.$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ függvény helyi szélsőértékeit.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$. A függvény első deriváltja

$$f'(x) = \frac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{6-6x^2}{(x^2+1)^2},$$

a függvény stacionárius pontjainak meghatározásához pedig oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet. Ekkor

$$\frac{6(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0$$

akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 = 0$, tehát a stacionárius pontok $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$. Vizsgáljuk ki most a szélsőértékek létezését, illetve típusát a függvény második deriváltja segítségével. A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{-12x(x^2+1)^2 - (6-6x^2)\cdot 2\cdot (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-12x(x^2+1) - (6-6x^2)\cdot 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^3-12x-24x+24x^2}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{-12x^3+24x^2-36x}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x(x^2-2x+3)}{(x^2+1)^3}.$$

Mivel

$$f''(-1) = \frac{-12\cdot(-1)((-1)^2-2\cdot(-1)+3)}{((-1)^2+1)^3} = \frac{12\cdot 6}{8} > 0,$$

ezért az $x_1 = -1$ pontban a függvénynek helyi minimuma van, a megfelelő függvényérték $f_{min}(-1) = -3$ és a görbe minimumpontja $P_{min}(-1,-3)$. Mivel

$$f''(1) = \frac{-12\cdot 1(1^2-2\cdot 1+3)}{(1^2+1)^3} = \frac{-12\cdot 2}{8} < 0,$$

ezért az $x_2 = 1$ pontban a függvénynek helyi maximuma van, a megfelelő függvényérték $f_{max}(1) = 3$, a görbe maximumpontja pedig $P_{max}(1,3)$.

3. Vizsgáljuk ki az $f(x) = x^4 \ln\dfrac{1}{x}$ függvény monotonitását és határozzuk meg a helyi szélsőértékeit.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya most $D_f = (0,\infty)$. A függvény első deriváltja

$$f'(x) = 4x^3 \ln\frac{1}{x} + x^4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^3\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right).$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha

$$x^3\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) = 0.$$

Innen vagy $x^3 = 0$, ahonnan $x_0 = 0$ adódik, de $0 \notin D_f$, vagy pedig $4 \ln \frac{1}{x} - 1 = 0$, ahonnan $x_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ az egyetlen stacionárius pont. Az f' függvény előjelének vizsgálatával határozzuk meg az f függvény monotonitását. Foglaljuk táblázatba a kivizsgálást.

D_f	$\left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \infty\right)$
x^3	$+$	$+$
$4 \ln \frac{1}{x} - 1$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

A mellékelt táblázat alapján az f függvény monoton növekvő a $\left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$ intervallumon és monoton csökkenő az $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \infty\right)$ intervallumon.

A táblázatból azt is leolvashatjuk, hogy a monotonitási tulajdonság szerint az f függvénynek az $x_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ pontban maximuma van. A megfelelő függvényérték, illetve a görbe maximumpontja:

$$f_{max}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) = \frac{1}{4e}, \quad \text{illetve} \quad P_{max}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \frac{1}{4e}\right).$$

4. Vizsgáljuk ki az $f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ függvény monotonitását és határozzuk meg a helyi szélsőértékeit.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya most $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, a függvény első deriváltja pedig

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{2x^2 + 2x + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

Mivel $f'(x) \neq 0$, ezért a függvénynek nincs stacionárius pontja, sígy szélsőértéke sem. Az f' függvény előjele a $P(x) = 2x^2 + 2x + 1$ másodfokú polinom előjelétől függ, amelyről megállapítható, hogy a diszkriminánsa $D = 4 - 8 < 0$, a főegyütthatója pedig pozitív, így a P polinomfüggvény minden értéke szigorúan pozitív, tehát az f' függvény értéke szigorúan negatív a teljes értelmezési tartományán. Ez azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományán.

5. Bontsuk szét az A pozitív számot két összeadandóra úgy, hogy az egyik összeadandó négyzetének és a másik összeadandó köbének összege a lehető legkisebb legyen.

Megoldás. Keressük egy összeg legkisebb értékét, azaz ha függvénykény kezeljük, akkor keressük egy függvény minimumát. Ha az A számot két összeadandóra bontjuk, akkor jelöljük közülük az egyiket x-szel, a másikat pedig $A-x$-szel. A feladatban megfogalmazott összeget ekkor az $f(x) = (A - x)^2 + x^3$ függvény írja le, s ennek a függvénynek a minimumát kell meghatározni. Alkalmazzuk a már ismert eljárást. Mivel

$$f'(x) = 2(A - x) + 3x^2 = 3x^2 - 2x + 2A,$$

a $3x^2 - 2x + 2A = 0$ egyenletet kell megoldani, amelynek gyökei

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 6A}}{3} > 0 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 6A}}{3} < 0.$$

Mivel pozitív összeadandókat keresünk, ezért a negatív x_2 gyök nem lehet számunkra jó megoldás, csakis x_1 jöhet számításba. Igazoljuk, hogy erre az összeadandóra valóban a legkisebb összeget kapjuk, azaz hogy $f''(x_1) > 0$. A függvény második deriváltja $f''(x) = 6x + 2$ és

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 6A}}{3}\right) = 6 \cdot \frac{-1 + \sqrt{1 + 6A}}{3} + 2 = +2\sqrt{1 + 6A} > 0,$$

tehát az állítást igazoltuk.

6. $2m^2$ bádogból készítsünk lehető legnagyobb térfogatú fedél nélküli négyzet alapú dobozt. Mekkora lesz ez a térfogat?

Megoldás. Fejezzük ki a négyzet alapú doboz térfogatát függvényként, s keressük a maximumát. Legyen a négyzet oldala x, a doboz magasssága pedig H. A $2m^2$ bádog a fedél nélküli doboz felszínével egyezik meg, ezért

$$x^2 + 4xH = 2, \quad \text{ahonnan} \quad H = \frac{2 - x^2}{4x}.$$

A doboz térfogata viszont

$$V = x^2 \cdot H, \quad \text{ahonnan} \quad V(x) = x^2 \cdot \frac{2 - x^2}{4x} = \frac{x}{4}\left(2 - x^2\right),$$

s ennek a függvénynek keressük a maximumát. Mivel

$$V'(x) = \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right) + \frac{x}{4} \cdot (-2x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4},$$

az

$$\frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4} = 0$$

egyenlet megoldásai, azaz a stacionárius pontok $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ és $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. Mivel a négyzet oldala csak pozitív lehet, ezért x_1 az egyetlen elfogadható stacionárius pont. Mutassuk meg, hogy az $x = \sqrt{\frac{2}{3}}m$ értékre valóban a lehető legnagyobb térfogatot kapjuk. A függvény második deriváltja

$$V''(x) = -\frac{3x}{2} \quad \text{és} \quad V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} < 0,$$

tehát a V függvénynek az $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ pontban valóban maximuma van, a keresett térfogat pedig

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{vagyis} \quad V_{max} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}m^3.$$

7. Adott R sugarú gömbbe írjunk lehető legnagyobb térfogatú hengert. Határozzuk meg a henger magasságát, valamint a keresett maximális térfogatot.

Megoldás. Készítsük el a gömb és a henger keresztmetszetének vázlatát. Legyen r a henger alapjának sugara és H a henger magassága. Mivel $r^2 = R^2 - \frac{H^2}{4}$, akkor a henger térfogata

$$V(r, H) = r^2\pi H, \quad \text{illetve} \quad V(H) = \left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right)\pi H = R^2\pi H - \frac{\pi}{4}H^3.$$

Határozzuk meg a fenti függvény maximumát. A függvény első deriváltja:

$$V'(H) = R^2\pi - \frac{3\pi}{4}H^2,$$

az

$$R^2\pi - \frac{3\pi}{4}H^2 = 0$$

egyenlet megoldásai pedig $H_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ és $H_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}$, amelyek közül csak $H_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ az egyetlen elfogadható stacionárius pont, hiszen a henger magassága pozitív szám kell legyen. $H_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ esetén

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{4R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}.$$

Mutassuk meg, hogy ez az érték valóban maximális térfogatot ad. Mivel

$$V''(H) = -\frac{3\pi}{2}H, \quad \text{ezért} \quad V''\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}} < 0,$$

így valóban maximumról beszélünk, s a lehető legnagyobb térfogatú henger sugara $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, magassága $H = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, térfogata pedig $V = \frac{4R^3\pi}{3\sqrt{3}}$.

8. Adott R sugarú gömbbe írjunk lehető legnagyobb térfogatú kúpot.

Megoldás. Készítsük el a gömb és a kúp keresztmetszetének vázlatát. Legyen r a kúp alapjának sugara, H pedig a kúp magassága. A kúp térfogata ekkor

$$V(r, H) = \frac{1}{3}r^2\pi H.$$

Az ábráról leolvashatjuk, hogy $r^2 = R^2 - (H - R)^2 = 2RH - H^2$, ezért

$$V(H) = \frac{1}{3}\left(2RH - H^2\right)\pi H = \frac{\pi}{3}\left(2RH^2 - H^3\right).$$

Keressük meg a fenti térfogatfüggvény maximumát. Mivel

$$V'(H) = \frac{\pi}{3}\left(4RH - 3H^2\right) = \frac{\pi}{3}H\left(4R - 3H\right),$$

és $V'(H) = 0$ kell teljesüljön, ezért a $H\,(4R - 3H) = 0$ egyenlet megoldásai lehetnek a stacionárius pontok. A $H_0 = 0$ az egyik megoldás, de ennek most nincs értelme, a másik megoldás $H_1 = \frac{4}{3}R$ viszont stacionárius pont, amelyre $r^2 = \frac{8R^2}{3} - \frac{16R^2}{9} = \frac{8}{9}R^2$. Mutassuk meg, hogy ezekkel az értékekkel valóban maximális térfogatot kapunk. A térfogatfüggvény második deriváltja

$$V''(H) = \frac{\pi}{3}\,(4R - 6H) \quad \text{és} \quad V''(H) = \frac{\pi}{3}\left(4R - 6 \cdot \frac{4}{3}R\right) = \frac{\pi}{3}\,(4R - 8R) < 0,$$

tehát valóban a maximális térfogatot kaptuk, amelynek értéke:

$$V_{max} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{9}R^2\pi \cdot \frac{4}{3}R = \frac{32}{81}R^3\pi.$$

9. *Adott területű és alapú háromszögek közül melyiknek legkisebb a kerülete?

Megoldás. Legyen az adott háromszög alapja a, másik két oldala b és c, területe pedig T. Ekkor $T = \frac{ah}{2}$, ahonnan $h = \frac{2T}{a}$. Ha a h magasság az a alapot x és $a - x$ részekre bontja fel, akkor a derékszögű háromszögekből

$$b^2 = h^2 + x^2, \quad \text{illetve} \quad b = \sqrt{h^2 + x^2}$$

és

$$c^2 = h^2 + (a - x)^2, \quad \text{illetve} \quad c = \sqrt{h^2 + (a - x)^2}$$

adódik, a keresett kerület pedig $K = a + b + c$, illetve

$$K(x, h) = a + \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h^2 + (a - x)^2}.$$

Mivel $h = \frac{2T}{a}$, így

$$K(x) = a + \sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + x^2} + \sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + (a - x)^2}$$

és

$$K'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + x^2}} + \frac{-2(a - x)}{2\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + (a - x)^2}}.$$

$K'(x) = 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + x^2}} = \frac{a - x}{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + (a - x)^2}},$$

innen pedig

$$x\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + (a - x)^2} = (a - x)\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + x^2}.$$

Négyzetre emelés és rendezés után azt kapjuk, hogy $x^2 = (a-x)^2$, ahonnan $x^2 = a^2 - 2ax + x^2$, s ebből $x = \frac{a}{2}$, ami azt jelenti, hogy a háromszögnek egyenlőszárúnak kell lennie. Mivel

$$K''(x) = \frac{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+x^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+x^2}}}{\frac{4T^2}{a^2}+x^2} - \frac{-\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2} - (a-x)\cdot\frac{-2(a-x)}{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2}}}{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{4T^2}{a^2}+x^2-x^2}{\left(\frac{4T^2}{a^2}+x^2\right)\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+x^2}} + \frac{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2-(a-x)^2}{\left(\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2\right)\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2}} =$$

$$= \frac{4T^2}{a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4T^2}{a^2}+x^2\right)^3}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2\right)^3}}\right),$$

és

$$K''\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{4T^2}{a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4T^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}\right)^3}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4T^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}\right)^3}}\right) > 0,$$

ezért az adott területű háromszögek közül valóban az egyenlőszárú háromszög a legkisebb kerületű.

10. *Határozzuk meg az adott palástterületű kúpok közül azt, amelyiknek lehető legnagyobb a térfogata.

Megoldás. Legyen r a kúp alapjának sugara, s az alkotója, H pedig a magassága. A feltételek szerint a kúp palástjának M területe állandó és ismert. Mivel $M = r\pi s$, ezért $s = \frac{M}{r\pi}$, és ugyanakkor $H = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{\frac{M^2}{r^2\pi^2} - r^2}$. A kúp térfogata

$$V(r,H) = \frac{1}{3}r^2\pi H,$$

illetve egy változóval kifejezve

$$V(r) = \frac{1}{3}r^2\pi\sqrt{\frac{M^2}{r^2\pi^2} - r^2} = \frac{1}{3}r^2\pi\frac{1}{r\pi}\sqrt{M^2 - r^4\pi^2} = \frac{1}{3}r\sqrt{M^2 - \pi^2r^4}.$$

A térfogatfüggvény első deriváltja

$$V'(r) = \frac{1}{3}\sqrt{M^2-\pi^2r^4} + \frac{1}{3}r\frac{-4\pi^2r^3}{2\sqrt{M^2-\pi^2r^4}} = \frac{1}{3}\sqrt{M^2-\pi^2r^4} - \frac{1}{3}\frac{2\pi^2r^4}{\sqrt{M^2-\pi^2r^4}}.$$

Mivel $V'(r) = 0$ kell teljesüljön, ezért meg kell oldani az

$$\frac{1}{3}\sqrt{M^2-\pi^2r^4} = \frac{1}{3}\frac{2\pi^2r^4}{\sqrt{M^2-\pi^2r^4}}$$

egyenletet. Rendezés után adódik, hogy

$$M^2 - \pi^2r^4 = 2\pi^2r^4, \quad \text{ahonnan} \quad M^2 = 3\pi^2r^4,$$

ebből pedig megkapjuk, hogy a megoldások $r_1 = \sqrt{\frac{M}{\pi\sqrt{3}}}$ és $r_2 = -\sqrt{\frac{M}{\pi\sqrt{3}}}$. A negatív megoldásnak nincs értelme a feladat szempontjából, ezért r_1 az egyetlen stacionárius pont. A második derivált

$$V''(r) = \frac{1}{3}\cdot\frac{-2\pi^2 r^3}{\sqrt{M^2-\pi^2r^4}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{4\pi^2r^3\sqrt{M^2-\pi^2r^4} - 2\pi^2r^4\frac{-2\pi^2r^3}{\sqrt{M^2-\pi^2r^4}}}{M^2-\pi^2r^4} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2r^3}{\sqrt{M^2-\pi^2r^4}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{4\pi^2r^3M^2 - 4\pi^4r^7 + 4\pi^4r^7}{(M^2-\pi^2r^4)\sqrt{M^2-\pi^2r^4}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2r^3}{\sqrt{M^2-\pi^2r^4}}\left(1 + \frac{4M^2}{M^2-\pi^2r^4}\right).$$

Mivel

$$\pi^2r^4 = \frac{M^2}{3} \quad \text{és} \quad M^2 - \pi^2r^4 = M^2 - \frac{M^2}{3} = \frac{2}{3}M^2,$$

ezért

$$V''\left(\sqrt{\frac{M}{\pi\sqrt{3}}}\right) < 0,$$

tehát az $r_1 = \sqrt{\frac{M}{\pi\sqrt{3}}}$ alapsugarú kúpnak a legnagyobb a térfogata, mégpedig

$$V_{max} = \frac{M}{3}\sqrt{\frac{20}{3\pi\sqrt{3}}}.$$

4.2.5. A függvény konvexitása és inflexiós pontjai

A konvex függvényeknek sok jelentős tulajdonsága van. Belátható például, hogy az adott intervallumon konvex függvények folytonosak is az adott intervallumon. Legfontosabbnak mégis a konvex függvények deriváltakkal kapcsolatos tulajdonságait tartjuk, ezért ezzel kapcsolatban fogalmazunk meg néhány állítást.

4.19. Tétel. *Az f differenciálható függvény akkor és csakis akkor konvex (konkáv) az $[a,b]$ intervallumon, ha f' növekvő (csökkenő) az $[a,b]$ intervallumon.*

4.20. Tétel. *Az $[a,b]$ intervallumon kétszer differenciálható f függvény akkor és csak akkor szigorúan konvex (konkáv) az $[a,b]$ intervallumon, ha $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) minden $x \in [a,b]$ pontra.*

Ezek után megfogalmazzuk a differenciálható függvény inflexiós pontja létezésének feltételeit. Elsőként szükséges feltételt mondunk ki.

4.21. Tétel. *Ha az x_0 pont valamely környezetében kétszer differenciálható f függvénynek az x_0 pontban inflexiós pontja van, akkor $f''(x_0) = 0$.*

A továbbiakban az inflexiós pont létezésére vonatkozó elegendő feltételeket adunk meg.

4.22. Tétel. *Ha f az x_0 pont valamely környezetében kétszer differenciálható és igaz, hogy $f''(x_0) = 0$, valamint az f'' függvény az x_0 pontban előjelet vált, akkor f-nek az x_0 pontban inflexiós pontja van.*

4.23. Tétel. *Ha f az x_0 pontban háromszor differenciálható, valamint $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek az x_0 pontban inflexiós pontja van.*

Ha az f függvény olyan, hogy $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, akkor az inflexiós pont létezéséről e tételek alapján nem mondhatunk semmit. A következő tétel segít az ilyen jellegű problémák megoldásában.

4.24. Tétel. *Legyen x_0 helyen n-szer differenciálható f függvény deriváltjaira igaz, hogy*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

és $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ekkor az f függvénynek az x_0 pontban akkor és csakis akkor van inflexiós pontja, ha n páratlan szám.

4.26. Példa. Az $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$ függvénynek $f'(x) = x^2 - 6x + 8$ az első deriváltja, $f''(x) = 2x - 6$ pedig a második deriváltja. Mivel $f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $2x - 6 = 0$, azaz $x = 3$ esetén, ezért a függvénynek itt lehet inflexiós pontja. Vizsgáljuk ki a második derivált előjelét! Mivel $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x - 6 > 0$, azaz $x > 3$ esetén és $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x - 6 < 0$, azaz $x < 3$ esetén, ezért levonhatjuk azt a következtetést, hogy az f függvény konvex a $(3, \infty)$ intervallumon és konkáv a $(-\infty, 3)$ intervallumon. Az itt leírt eredményeket táblázatba is foglalhatjuk.

D_f	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 3$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\bigcap$	$\bigcup$

Mivel az f függvény az $x = 3$ pontban konkávitásból konvexitásba megy át, tehát görbületet vált, ezért ebben a pontban az f függvénynek inflexiós pontja van. A függvény értéke az inflexiós pontjában $f_{inf}(3) = 6$, az inflexiós pont koordinátái pedig $P_{inf}(3, 6)$.

Az inflexiós pont létezését az f függvény harmadik deriváltja segítségével is ellenőrizhetjük. Mivel a harmadik derivált $f'''(x) = 2$, ezért $f'''(3) = 2 \neq 0$ is igaz, tehát az $x = 3$ pontban az f függvénynek inflexiós pontja van.

4.27. Példa. Az $f(x) = 2x^4 + 3x + 4$ függvénynek $f'(x) = 8x^3 + 3$ az első deriváltja, $f''(x) = 24x^2$ pedig a második deriváltja. Mivel $f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $x = 0$, ezért itt van a függvénynek lehetséges inflexiós pontja. Viszont $f'''(x) = 48x$ és $f'''(0) = 0$, ezért tovább kell számolni a függvény deriváltjait ahhoz, hogy el lehessen dönteni vajon itt inflexiós pontja lesz-e a függvénynek vagy sem. Mivel $f^4(x) = 48$ és $f^4(0) = 48 \neq 0$ teljesül, azaz páros deriváltra lesz először nullától különböző függvényérték az $x = 0$ pontban, így ebben a pontban a függvénynek nem inflexiós pontja van, hanem szélsőértéke. $f^4(0) = 48 > 0$ miatt ez az f függvény egy minimumpontja.
Másik indoklás: mivel $f''(x) = 24x^2 \geq 0$ a teljes értelmezési tartományon, ezért az f függvény konvex a teljes értelmezési tartományon, vagyis nem vált görbületet az $x = 0$ pontban, ezért az $x = 0$ pont nem inflexiós pont.

4.2.6. Függvénykivizsgálás

A függvénykivizsgálás vázlata:

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f \subseteq \mathbf{R}$. Érdemes az értelmezési tartományt intervallumként, illetve intervallumok uniójaként felírni és kivizsgálni a függvény viselkedését az intervallumok végpontjaiban, s így a függőleges és vízszintes aszimptotákat is megkapjuk, ha vannak.

2. PARITÁS: Kivizsgáljuk, hogy a függvény páros vagy páratlan, vagy esetleg egyik tulajdonsággal sem rendelkezik.

3. NULLAHELY: Meghatározzuk az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásait, mert ezekben a pontokban metszi a függvény grafikonja az x-tengelyt.

4. ELŐJEL: Meghatározzuk az $f(x) > 0$ és az $f(x) < 0$ egyenlőtlenségek megoldáshalmazait, mert az így kapott intervallumokon lesz a függvény grafikonja az x-tengely felett, illetve alatt.

5. ASZIMPTOTÁK
a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Az $x = a$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygörbe függőleges aszimptotája, ha

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: Az $y = f(x)$ függvénygörbe vízszintes aszimptotája az olyan $y = b$ egyenes, amelyre

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Az $y = kx + n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygörbe ferde aszimptotája, amennyiben

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{és} \quad n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right), \quad k \neq 0, \quad k, n \neq \pm\infty.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai adják a stacionárius pontokat, amelyekben a függvénynek lehetnek szélsőértékei, mégpedig maximuma, amennyiben ott a függvény monoton növekedésből monoton csökkenésbe vált, illetve minimuma, amennyiben ott a függvény monoton csökkenésből monoton növekedésbe vált.

7. MONOTONITÁS: Azokon az intervallumokon, ahol $f'(x) > 0$, ott a függvény szigorúan monoton növekszik, s ahol $f'(x) < 0$, ott a függvény szigorúan monoton csökken.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldásaiban lehetnek a függvénynek inflexiós pontjai, amennyiben ott a függvény görbületet vált, azaz konvexitásból konkávitásba megy át, vagy fordítva.

9. KONVEXITÁS: Azokon az intervallumokon, ahol $f''(x) > 0$, ott a függvény konvex, s ahol $f''(x) < 0$, ott a függvény konkáv.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA: A koordinátarendszerben bejelöljük a kivizsgált adatokat, majd a jellegzetes pontok (nullahelyek, szélsőértékek, inflexiós pontok) összekötésével megrajzoljuk a függvény grafikonját.

4.28. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = x^3(x^2-1)$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

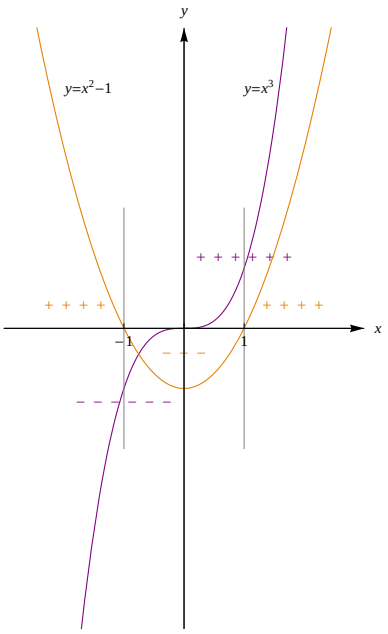
1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: Az f függvény polinom, tehát $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.
2. PARITÁS: A függvény értelmezési tartománya az origóra szimmetrikus intervallum, így van értelme vizsgálni a paritást. Mivel

$$f(-x) = (-x)^3((-x)^2-1) = -x^3(x^2-1) = -f(x),$$

ez azt jelenti, hogy a függvény páratlan, tehát grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x^3(x^2-1) = 0$, azaz $x^3(x-1)(x+1) = 0$. A kapott egyenlet megoldásai az $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 1$, ez pedig azt jelenti, hogy a függvény görbéje a $(-1, 0)$, $(0, 0)$ és $(1, 0)$ pontokban metszi az x-tengelyt.

4. ELŐJEL: Az f függvény előjelét meghatározhatjuk a tényezőit alkotó függvények grafikonjainak segítségével, vagyis az $y = x^3$ és $y = x^2-1$ függvények grafikonjainak ábrázolásával. Mivel a függvények előjelei megegyeznek az $(-1, 0)$ és $(1, \infty)$ intervallumon, különböznek a $(-\infty, -1)$ és $(0, 1)$ intervallumon, ezért
$f(x) > 0$ ha $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ és
$f(x) < 0$ ha $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.



5. ASZIMPTOTÁK
a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Mivel az f függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, a függvénynek nincs függőleges aszimptotája.
b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: A függvénynek nincs vízszintes aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3(x^2-1) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3(x^2-1) = -\infty.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3(x^2-1)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2(x^2-1) = \infty,$$

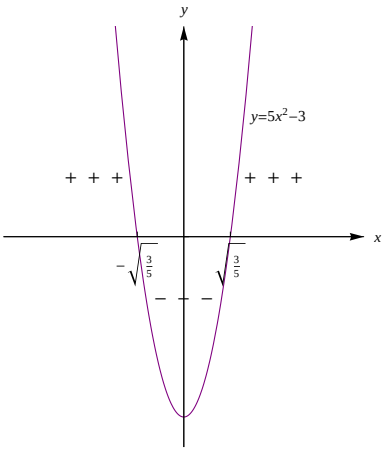
ezért a függvénynek nincs ferde aszimptotája.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: A függvény első deriváltja

$$f'(x) = 3x^2(x^2-1) + x^3 \cdot 2x = x^2(3x^2 - 3 + 2x^2) = x^2(5x^2-3).$$

Mivel $f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x^2(\sqrt{5}x - \sqrt{3})(\sqrt{5}x + \sqrt{3}) = 0$, ezért az f függvény stacionárius pontjai $x_2 = 0$, $x_4 = -\dfrac{\sqrt{15}}{5} \approx -0,77$ és $x_5 = \dfrac{\sqrt{15}}{5} \approx 0,77$.

7. MONOTONITÁS: Az f' függvény előjelének meghatározására alkalmazzuk az $f'(x) = x^2(5x^2-3)$ alakot.
Mivel $x^2 > 0$ ha $x \neq 0$, az $y = 5x^2 - 3$ parabola grafikonja alapján megállapítjuk, hogy $5x^2 - 3 > 0$, ha $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{15}}{5}, \infty)$ és $5x^2 - 3 < 0$, amennyiben $x \in (-\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5})$.
Ebből az következik, hogy $f'(x) > 0$, azaz az f függvény növekszik a $(-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{15}}{5}, \infty)$ intervallumon és $f'(x) < 0$, azaz az f függvény csökken az $(-\frac{\sqrt{15}}{5}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{15}}{5})$ intervallumon.



Az f' függvény előjelet vált az $x_4 = -\frac{\sqrt{15}}{5}$, illetve az $x_5 = \frac{\sqrt{15}}{5}$ pontban, így ezekben a pontokban a függvénynek szélsőértéke van. Pontosabban, x_4-ben a függvénynek maximuma van, mert ott a függvénygörbe növekedésből csökkenésbe vált, x_5-ben pedig a függvénynek minimuma van, mert ott csökkenésből vált növekedésbe. Ugyanakkor $f_{max}(x_4) \approx 0,18$ és $f_{min}(x_5) \approx -0,18$.

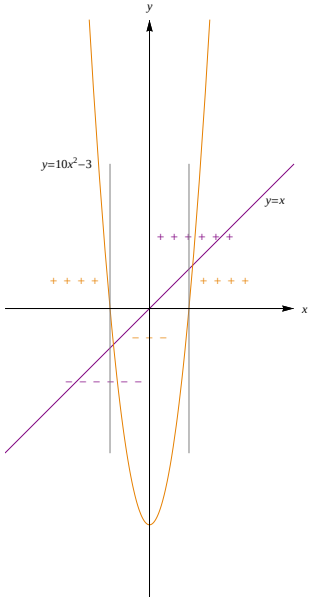
8. INFLEXIÓS PONTOK: A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 2x(5x^2-3) + x^2 \cdot 10x = 2x(10x^2-3).$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x(\sqrt{10}x - \sqrt{3})(\sqrt{10}x + \sqrt{3}) = 0$. A kapott egyenlet megoldásai, s egyben a lehetséges inflexiós pontok

$$x_2 = 0, \quad x_6 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{30}}{10} \quad \text{és} \quad x_7 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

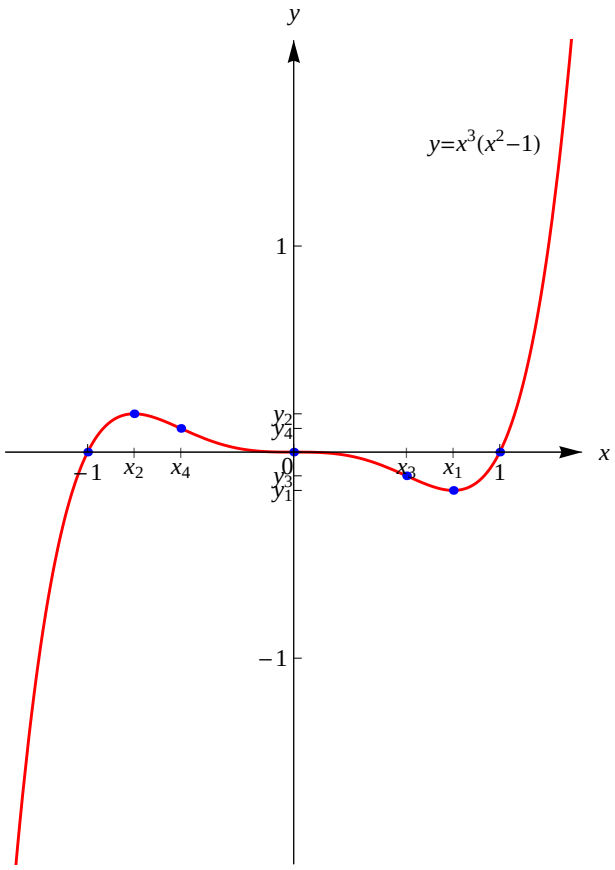
9. KONVEXITÁS: Az $f''(x) = 2x(10x^2-3)$ függvény előjele az $y = x$ és $y = 10x^2 - 3$ függvények grafikonjai alapján így alakul:
$f''(x) > 0$ ha $x \in \left(-\frac{\sqrt{30}}{10}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{30}}{10}, \infty\right)$,
$f''(x) < 0$ ha $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{30}}{10}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{30}}{10}\right)$.
Tehát az f függvény konvex az $\left(-\frac{\sqrt{30}}{10}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{30}}{10}, \infty\right)$ intervallumon és konkáv a $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{30}}{10}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{30}}{10}\right)$ intervallumon.
Mivel az f'' függvény előjelet vált a nullahelyeiben, ezért az $x_2 = 0$, $x_6 = -\frac{\sqrt{30}}{10}$ és $x_7 = \frac{\sqrt{30}}{10}$ pontokban az f függvénynek inflexiós pontjai vannak.



Az inflexiós pontoknak megfelelő függvényértékek:

$$f_{inf}(x_6) \approx 0,12 \quad \text{és} \quad f_{inf}(x_7) \approx -0,12.$$

10. FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4.29. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{-x^2 + 5x + 14}$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A számláló és a nevező tényezőkre bontása után kapjuk, hogy $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-5)}{(7-x)(x+2)}$, vagyis az $x+2$ binommal tudunk egyszerűsíteni, ha $x+2 \neq 0$. Ezáltal a függvény az $f(x) = \dfrac{x-5}{7-x}$ formát veszi fel, ahol $x \neq -2$. Mivel a nevező nem lehet nulla, ezért $7 - x \neq 0$. Tehát $x \neq 7$ és $x \neq -2$, így

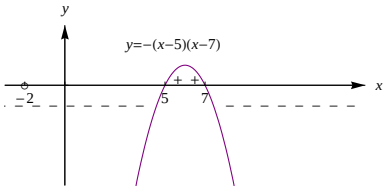
$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 7\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 7) \cup (7, \infty).$$

2. PARITÁS: A függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus intervallum az origóra, így a függvény se nem páros se nem páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x - 5 = 0$. Az egyenlet megoldása $x = 5$, tehát $x = 5$ a függvény nullahelye, s a függvény görbéje illeszkedik az $(5, 0)$ pontra.

4. ELŐJEL: Az f függvény előjele megegyezik a $P(x) = (x-5)(7-x) = -(x-5)(x-7)$ polinom előjelével az értelmezési tartományon.

A P polinom konvex, mert a főegyütthatója $-1 < 0$ és metszi az x-tengelyt az $x = 5$ és $x = 7$ pontokban. A P polinom grafikonja alapján megállapítjuk, hogy $P(x) > 0$, ha $x \in (5, 7)$ és $P(x) < 0$ ha $x \in (-\infty, 5) \cup (7, \infty)$.



Tehát, $f(x) > 0$ ha $x \in (5, 7)$ és $f(x) < 0$ ha $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 5) \cup (7, \infty)$.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x) = \lim_{x\to -2-0} \frac{x-5}{7-x} = \frac{-7}{9} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to -2+0} f(x) = \lim_{x\to -2+0} \frac{x-5}{7-x} = \frac{-7}{9}$$

miatt az f függvénynek nincs függőleges aszimptotája az $x = -2$ pontban.
Mivel

$$\lim_{x\to 7-0} f(x) = \lim_{x\to 7-0} \frac{x-5}{7-x} = \frac{2}{+0} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 7+0} f(x) = \lim_{x\to 7+0} \frac{x-5}{7-x} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

ezért $x = 7$ az f függvény függőleges aszimptotája.

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{7-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(\frac{7}{x}-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{\frac{7}{x}-1} = -1$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-5}{7-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(\frac{7}{x}-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{\frac{7}{x}-1} = -1,$$

tehát $y = -1$ vízszintes aszimptotája a függvénynek.

c) FERDE ASZIMPTOTA: Mivel a függvénynek van vízszintes aszimptotája, ezért $y = kx+n$ egyenletű ferde aszimptotája nincs, amit számítással is igazolhatunk:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{x(7-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(7-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{7-x} = 0,$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-5}{x(7-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(7-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{7-x} = 0.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = \dfrac{7-x-(x-5)(-1)}{(7-x)^2} = \dfrac{2}{(7-x)^2}$.
Mivel $f'(x) = 0$ nem lehetséges, ezért az f függvénynek nincs stacionárius pontja, s így nincs szélsőértéke sem.

7. MONOTONITÁS: Minden $x \in D_f$ esetén érvényes, hogy $f'(x) > 0$, amiből következik, hogy az f függvény növekszik a $(-\infty, -2) \cup (-2, 7) \cup (7, \infty)$ intervallumon.

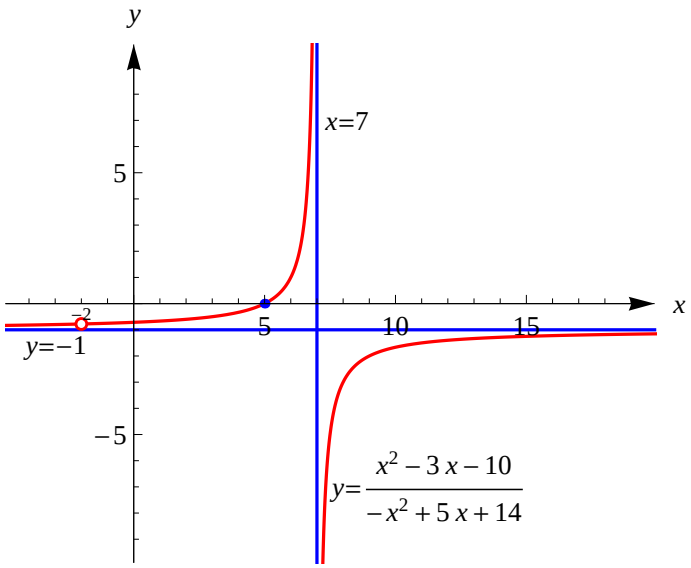
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \big(2(7-x)^{-2}\big)' = -4(7-x)^{-3} \cdot (-1) = \frac{4}{(7-x)^3}.$$

Mivel $f''(x) = 0$ nem lehetséges, a függvénynek nincs inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: Vizsgáljuk ki az f'' függvény előjelét. $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $7 - x > 0$ és $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $7 - x < 0$, ezért $f''(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 7)$ és $f''(x) < 0$, ha $x \in (7, \infty)$. Az f függvény konvex a $(-\infty, -2) \cup (-2, 7)$ intervallumon és konkáv a $(7, \infty)$ intervallumon.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4.30. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = x\sqrt{1-x}$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = (-\infty, 1]$, mert $1 - x \geq 0$, ahonnan $x \leq 1$.

2. PARITÁS: A függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus intervallum az origóra, így a függvény se nem páros se nem páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\sqrt{1-x} = 0$. A kapott egyenlet megoldásai $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$, s ezek egyben az f függvény nullahelyei.

4. ELŐJEL: Mivel $\sqrt{1-x} > 0$ a teljes értelmezési tartományon, ezért $f(x) > 0$ ha $x > 0$ és $f(x) < 0$ ha $x < 0$.

5. ASZIMPTOTÁK: A függvénynek se függőleges, se ferde, se vízszintes aszimptotája nincs, mert

$$\lim_{x \to 1-0} x\sqrt{1-x} = (1-0)\sqrt{+0} = +0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\sqrt{1-x} = -\infty.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$, $x \neq 1$.
$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2 - 3x = 0$, azaz $x_3 = \dfrac{2}{3}$, és ez egyben az f függvény stacionárius pontja.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $2 - 3x > 0$, azaz $x < \frac{2}{3}$ esetén. $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $2-3x < 0$, azaz $x > \frac{2}{3}$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ intervallumon, a $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő. A monotonitás alapján az f függvénynek $x_3 = \frac{2}{3}$-ban maximuma van és $f_{max}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$.

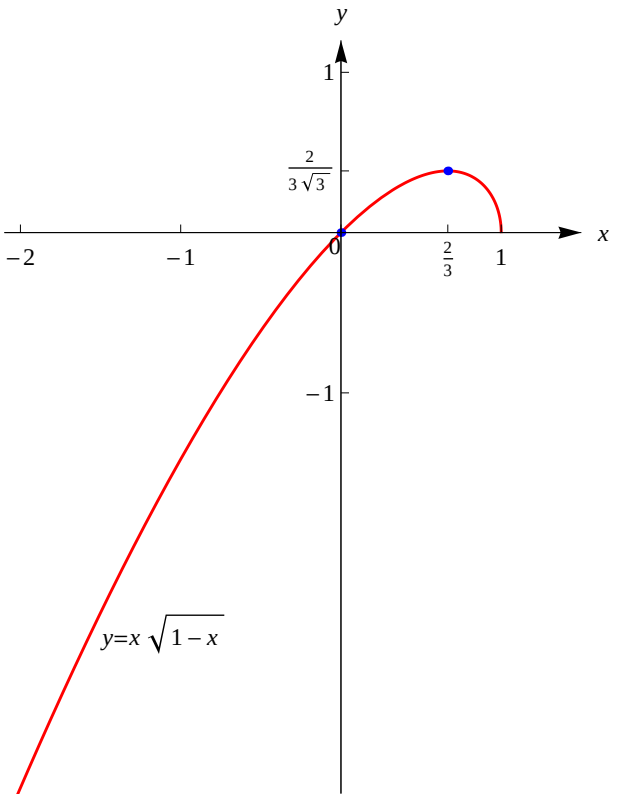
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3\sqrt{1-x} + (2-3x)\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-6(1-x) + (2-3x)}{2(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{3x-4}{4(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 4 = 0$, azaz $x_4 = \frac{4}{3}$ esetén. Mivel $x_4 \notin D_f$, ezért az f függvénynek nincs inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x-4 > 0$, azaz $x > \frac{4}{3}$ esetén. Mivel ez az intervallum nincs benne az értelmezési tartományban, így az f függvény második deriváltja nem lehet pozitív. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 4 < 0$, azaz $x < \frac{4}{3}$ esetén. Ez a tulajdonság érvényes a D_f értelmezési tartományon, tehát az f függvény konkáv, ha $x \in D_f$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4.31. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. PARITÁS: Mivel $f(-x) = -xe^{-\frac{-x}{2}} = -xe^{\frac{x}{2}} \neq \pm f(x)$, ezért a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $xe^{-\frac{x}{2}} = 0$. Az egyenlet megoldása $x_1 = 0$, s ez az f függvény nullahelye.

4. ELŐJEL: Mivel az exponenciális függvény mindig pozitív, ezért $f(x) > 0$, ha $x > 0$, illetve $f(x) < 0$, ha $x < 0$.

5. ASZIMPTOTÁK
a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Nincs, mert a függvény minden valós számra értelmezett.
b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 0$ pozitív irányban vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{+\infty} = +0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = -\infty \cdot \infty = -\infty.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Csak negatív irányban kell kivizsgálni, mert pozitív irányban van vízszintes aszimptota. Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty,$$

ezért ferde aszimptota nincs.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$.
$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = 0$, vagyis ha $1 - \frac{x}{2} = 0$. A kapott egyenlet megoldása $x_2 = 2$, az f függvény stacionárius pontja.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - \frac{x}{2} > 0$, azaz $x < 2$ esetén. $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - \frac{x}{2} < 0$, azaz $x > 2$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, 2)$ intervallumon, a $(2, +\infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő. A monotonitás alapján az f függvénynek $x_2 = 2$-ben maximuma van és $f_{max}(2) = \frac{2}{e}$.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

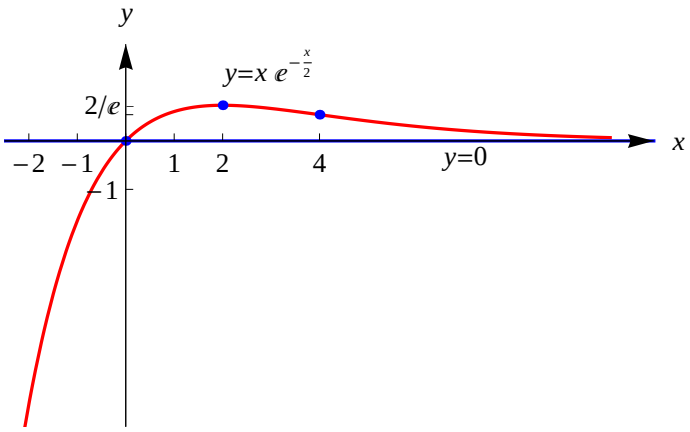
$$f''(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(-1 + \frac{x}{4}\right)e^{-\frac{x}{2}}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $-1 + \frac{x}{4} = 0$. Az f függvény lehetséges inflexiós pontja ezért $x_3 = 4$-ben van.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $-1 + \frac{x}{4} > 0$, azaz $x > 4$ esetén. $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $-1 + \frac{x}{4} < 0$, azaz $x < 4$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény konvex az $(-\infty, 4)$ intervallumon, a $(4, +\infty)$ intervallumon pedig

konkáv. Mivel x_3-ban az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontja van és $f_{inf}(4) = \frac{4}{e^2}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4.32. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A logaritmus függvény csak pozitív értékekre értelmezett és a nevező nem lehet nulla, azaz $x > 0$ és $x \neq 0$ kell, hogy teljesüljön. Tehát

$$D_f = \mathbf{R}^+ = (0, +\infty).$$

2. PARITÁS: Mivel az értelmezési tartomány nem szimmetrikus az origóra, ezért a függvény nem lehet se páros, se páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $1+\ln x = 0$, azaz $x_1 = e^{-1}$ a nullahely.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$, ha $\dfrac{1+\ln x}{x} > 0$ és $f(x) < 0$, ha $\dfrac{1+\ln x}{x} < 0$. Mivel $x > 0$ teljesül az értelmezési tartományon, ezért f pozitív, ha $1 + \ln x > 0$, azaz $x > e^{-1}$ és f negatív, ha $1 + \ln x < 0$, vagyis $0 < x < e^{-1}$.

5. ASZIMPTOTÁK
a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Az $x = 0$ egyenes függőleges aszimptota, mert

$$\lim_{x \to +0} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: Az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptota, mert a L'Hospital szabály alkalmazása után kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = +0.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Mivel van vízszintes aszimptota, ezért ferde nem lehet.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x = 0$. Az egyenlet megoldása $x_2 = 1$, és ez az f függvény stacionárius pontja.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x < 0$, azaz $0 < x < 1$ esetén. $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x > 0$, azaz $x > 1$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a $(0, 1)$ intervallumon, és szigorúan monoton csökkenő az $(1, +\infty)$ intervallumon. A monotonitás alapján az f függvénynek $x_2 = 1$-ben maximuma van és $f_{max}(1) = 1$.

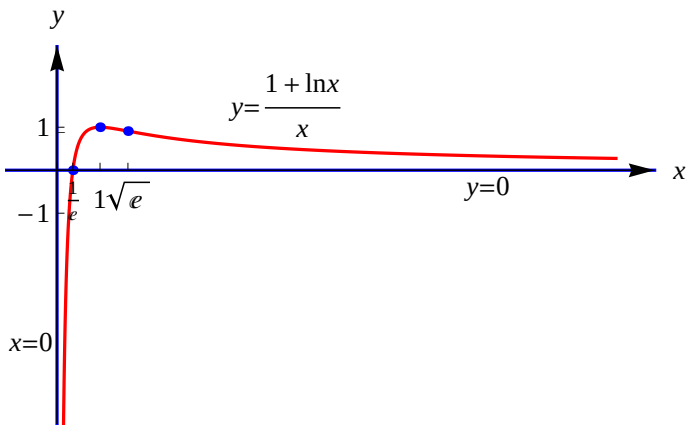
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 + (\ln x) \cdot (2x)}{x^4} = \frac{x(2\ln x - 1)}{x^4} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2\ln x - 1 = 0$, vagyis $x_3 = \sqrt{e}$ a lehetséges inflexiós pont.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $2\ln x - 1 > 0$, azaz $x > \sqrt{e}$ esetén. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $2\ln x - 1 < 0$, azaz $0 < x < \sqrt{e}$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény konvex az $(0, \sqrt{e})$ intervallumon, a $(\sqrt{e}, +\infty)$ intervallumon pedig konkáv. Mivel x_3-ban az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontja van és $f_{inf}(\sqrt{e}) = \dfrac{3}{2\sqrt{e}}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



FELADATOK.

Vizsgáljuk ki a következő függvényeket és rajzoljuk le grafikonjaikat.

1. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 4$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, mert f polinomfüggvény.

2. PARITÁS: Mivel $f(-x) = 2(-x)^4 - 4(-x)^2 + 4 = 2x^4 - 4x^2 + 4 = f(x)$, ezért a függvény páros. Ez azt jelenti, hogy a függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y koordinátatengelyhez viszonyítva.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$. $x^2 = t$ behelyettesítés után kapjuk a $t^2 - 2t + 2 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek diszkriminánsa $D = 4 - 8 < 0$. Ebből következik, hogy se a másodfokú egyenletnek, se az eredeti negyedfokú egyenletnek nincs valós megoldása, tehát a függvény grafikonja nem metszi az x-tengelyt.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$, ha $x^4 - 2x^2 + 2 > 0$. Mivel ez a tulajdonság a teljes értelmezési tartományon teljesül, ezért az f függvény szigorúan pozitív az értelmezési tartomány minden pontjára.

5. ASZIMPTOTÁK: A függvénynek nincsenek aszimptotái, viszont

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2x^4 - 4x^2 + 4\right) = +\infty.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = 2\left(4x^3 - 4x\right) = 8x\left(x^2 - 1\right)$.
$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x+1)x(x-1) = 0$. A függvény stacionárius pontjai tehát $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 1$.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x+1)x(x-1) > 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x+1)x(x-1) < 0$.

D_f	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

A mellékelt táblázat alapján a függvény szigorúan monoton növekvő a $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ intervallumon.

A táblázatból leolvashatjuk, hogy a monotonitási tulajdonság szerint az f függvénynek $x_1 = -1$-ben minimuma van, $x_2 = 0$-ban maximuma van és $x_3 = 1$-ben minimuma van. Számítással adódik, hogy a megfelelő függvényértékek:

$$f_{min}(-1) = f_{min}(1) = 2 \quad \text{és} \quad f_{max}(0) = 4.$$

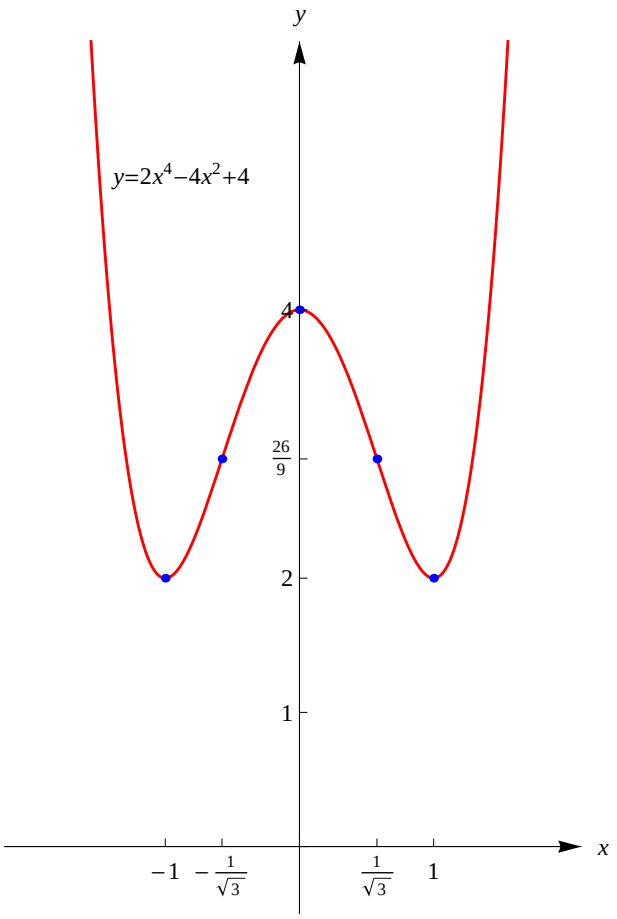
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja $f''(x) = 8\left(3x^2 - 1\right)$.
$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x^2 - 1 = 0$. A lehetséges inflexiós pontok tehát $x_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ és $x_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x^2 - 1 > 0$ teljesül, azaz $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ és $x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ esetén. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x^2 - 1 < 0$, azaz $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy a $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ intervallumon az f függvény konvex, a $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ intervallumon pedig konkáv.

Mivel x_4-ben és x_5-ben az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontjai vannak. A megfelelő függvényértékek az inflexiós pontokban:

$$f_{inf}(x_4) = f_{inf}(x_5) = \frac{26}{9}.$$

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



2. $f(x) = \frac{1}{2}\left(0,3x^5 - 2,5x^3 + 6x\right)$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény páratlan, mivel

$$f(-x) = \frac{1}{2}\left(0,3(-x)^5 - 2,5(-x)^3 + 6(-x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-0,3x^5 + 2,5x^3 - 6x\right) = -\frac{1}{2}\left(0,3x^5 - 2,5x^3 + 6x\right) = -f(x).$$

3. NULLAHELY: $f(x) = \frac{1}{20}x\left(3x^4 - 25x^2 + 60\right)$, ezért $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\left(3x^4 - 25x^2 + 60\right) = 0$. Mivel az $x^2 = t$ helyettesítés után kapott $3t^2 - 25t + 60$

másodfokú trinom mindig pozitív (mert diszkriminánsa $25^2 - 12 \cdot 60 = 625 - 720 < 0$ és főegyütthatója pozitív), ezért $x_1 = 0$ az egyetlen nullahely.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ ha $x\left(3x^4 - 25x^2 + 60\right) > 0$, azaz $x > 0$ esetén, és $f(x) < 0$ ha $x\left(3x^4 - 25x^2 + 60\right) < 0$, vagyis $x < 0$ esetén.

5. ASZIMPTOTÁK: A függvénynek nincsenek aszimptotái, viszont

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2}\left(0,3x^5 - 2,5x^3 + 6x\right) = \pm\infty.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{1}{20}\left(15x^4 - 75x^2 + 60\right) = \frac{3}{4}\left(x^4 - 5x^2 + 4\right) = \frac{3}{4}\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right).$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$, s eszerint az f függvény stacionárius pontjai $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ és $x_5 = 2$.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) > 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) < 0$.

D_f	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

A táblázatból látható, hogy a függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (2,\infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(-2,-1) \cup (1,2)$ intervallumon.

A táblázatból leolvashatjuk, hogy a monotonitás alapján az f függvénynek $x_2 = -2$-ben maximuma van, $x_2 = -1$-ben minimuma van, $x_3 = 1$-ben maximuma van és $x_4 = 2$-ben minimuma van, valamint $f_{max}(-2) = -0,8$, $f_{min}(-1) = -1,7$, $f_{max}(1) = 1,7$ és $f_{min}(2) = 0,8$.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{3}{4}\left(4x^3 - 10x\right) = \frac{3}{2}x\left(2x^2 - 5\right).$$

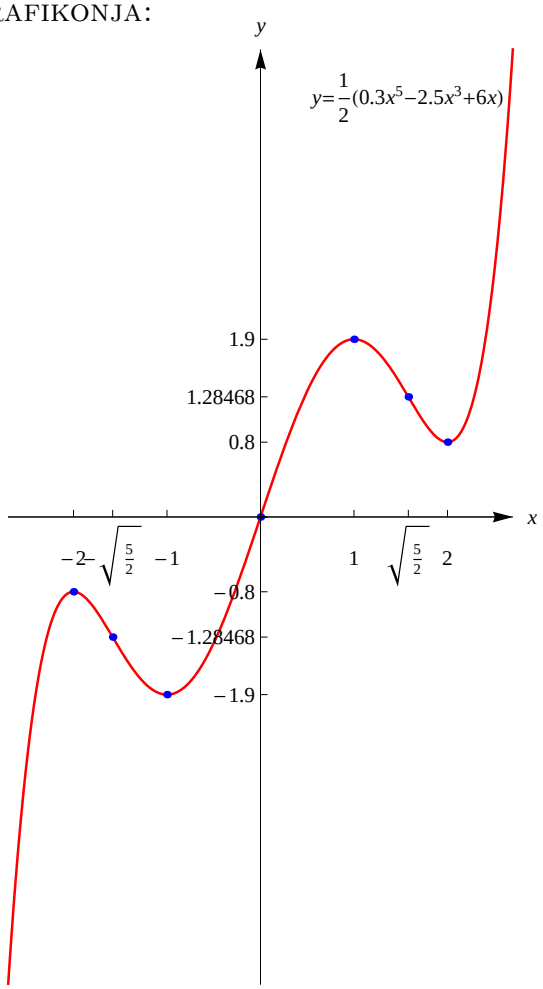
$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\left(2x^2 - 5\right) = 0$. Az egyenlet megoldásai, és egyben a lehetséges inflexiós pontok, $x_6 = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ és $x_7 = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\left(2x^2 - 5\right) > 0$, valamint $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\left(2x^2 - 5\right) < 0$.

D_f	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{10}}{2},\infty\right)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x^2-5$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

A fenti táblázatból megállapíthatjuk, hogy a $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$ intervallumon az f függvény konvex, a $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ intervallumon pedig konkáv. Mivel x_6-ban és x_7-ben az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontjai vannak és $f_{inf}(x_6) = -\frac{13\sqrt{10}}{2}$, illetve $f_{inf}(x_7) = \frac{13\sqrt{10}}{2}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



3. $f(x) = \frac{4}{x} - x$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A nevező nem lehet nulla, ezért az értelmezési tartomány $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. PARITÁS: Mivel $f(-x) = \frac{4}{-x} - (-x) = -\left(\frac{4}{x} - x\right) = -f(x)$, ezért a függvény páratlan, azaz a függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\frac{4 - x^2}{x} = 0$, azaz $4 - x^2 = 0$. Ennek alapján az egyenlet megoldása és egyben a függvény nullahelyei $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{4-x^2}{x} > 0$ és $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{4-x^2}{x} < 0$.

D_f	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$4-x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

A mellékelt táblázatból látható, hogy a függvény pozitív a $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ intervallumon és negatív a $(-2,0)\cup(2,\infty)$ intervallumon.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Az $x=0$ egyenes függőleges aszimptota, mivel

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{4-x^2}{x} = \frac{4-(+0)^2}{+0} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

és

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{4-x^2}{x} = \frac{4-(-0)^2}{-0} = \frac{4}{-0} = -\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: Vízszintes aszimptota nincs, mert

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4}{x} - x\right) = \mp\infty.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Ha $y = kx + n$ alakban keresünk ferde aszimptotát, akkor

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = -1$$

és

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4}{x}\right) = 0,$$

tehát a függvénynek $y=-x$ ferde aszimptotája.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = \dfrac{-2x\cdot x-(4-x^2)}{x^2} = -\dfrac{x^2+4}{x^2} \neq 0$. Mivel az f' függvénynek nincs nullahelye, ezért az f függvénynek nincs stacionárius pontja és így szélsőértéke sem.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) = -\dfrac{x^2+4}{x^2} < 0$ minden $x \in D_f$ esetén, ezért a függvény értelmezési tartományának minden pontjában szigorúan monoton csökkenő.

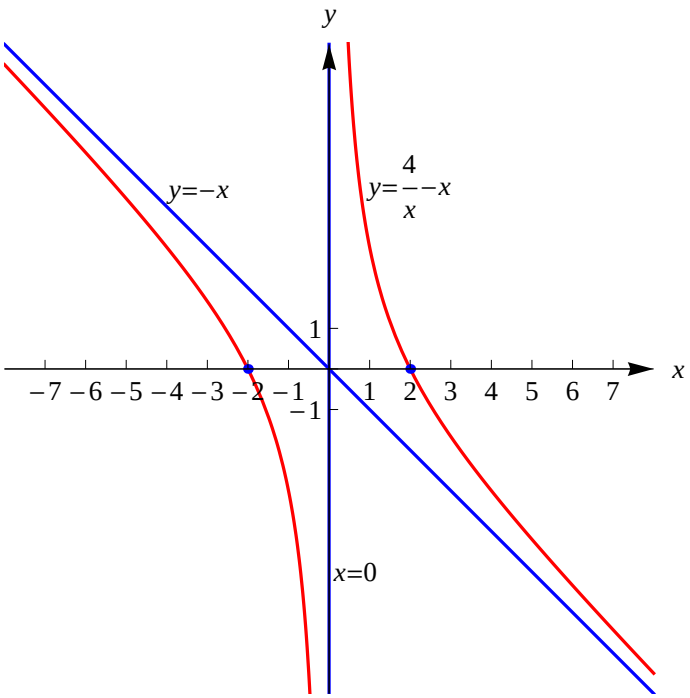
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = -\frac{2x\cdot x^2-(x^2+4)\cdot 2x}{x^4} = -\frac{x\cdot(2x^2-2x^2-8)}{x\cdot x^3} = \frac{8}{x^3} \neq 0.$$

Mivel az f'' függvénynek nincs nullahelye, ezért az f függvénynek nincs inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\frac{8}{x^3} > 0$, azaz $x > 0$ esetén, valamint $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\frac{8}{x^3} < 0$, azaz $x < 0$ esetén. Ez azt jelenti, hogy a $(-\infty, 0)$ intervallumon az f függvény konkáv, a $(0, \infty)$ intervallumon pedig konvex.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: Mivel $x + 1 = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = -1$, és a nevező nem lehet nulla, ezért $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

2. PARITÁS: Az értelmezési tartomány nem szimmetrikus az origóra, tehát a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\frac{x^2}{(x+1)^2} = 0$, vagyis $x^2 = 0$ esetén. Eszerint $x_1 = 0$ a függvény nullahelye.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\frac{x^2}{(x+1)^2} > 0$, azaz minden $x \in D_f$ esetén, tehát az f függvény pozitív a teljes értelmezési tartományon.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: $x = -1$ függőleges aszimptota, mert

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} f(x) = \lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{(-1 \pm 0)^2}{(-1 \pm 0 + 1)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 1$ vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: A vízszintes aszimptota létezése miatt ferde aszimptota nincs.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)^2 - x^2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^3} = \frac{2x}{(x+1)^3}.$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2x}{(x+1)^3} = 0$, vagyis, ha $2x = 0$. Eszerint az f függvény nullahelye $x_1 = 0$, és ez egyben stacionárius pont is.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2x}{(x+1)^3} > 0$, azaz ha $x(x+1) > 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2x}{(x+1)^3} < 0$, azaz akkor és csakis akkor, ha $x(x+1) < 0$. Az $y = x(x+1)$ parabola $x = -1$-ben és $x = 0$-ban metszi az x-tengelyt, s mivel minimuma van, pozitív $x < -1$ és $x > 0$ esetén, illetve negatív $-1 < x < 0$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(-1, 0)$ intervallumon. A monotonitási tulajdonságból következik, hogy $x_1 = 0$ pontban a függvénynek minimuma van, így a megfelelő függvényérték

$$f_{min}(0) = 0.$$

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

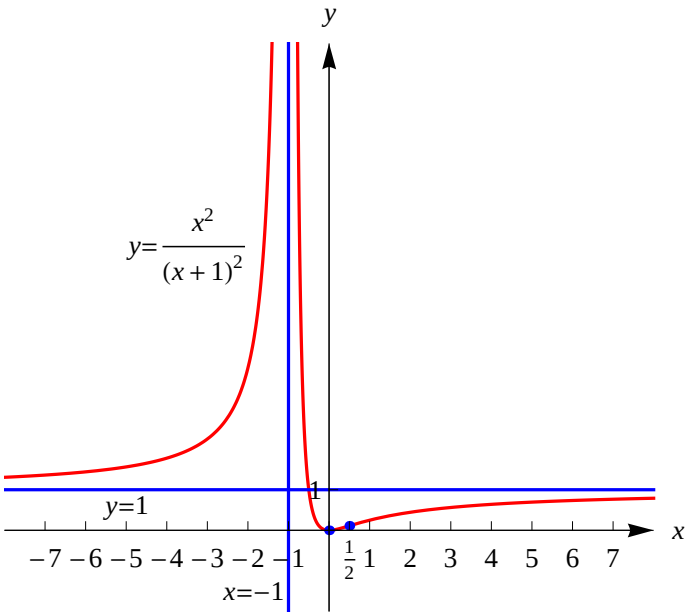
$$f''(x) = \frac{2(x+1)^3 - 2x \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{2(x+1) - 6x}{(x+1)^4} = \frac{2-4x}{(x+1)^4} = \frac{2(1-2x)}{(x+1)^4}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2(1-2x)}{(x+1)^4} = 0$, azaz $1 - 2x = 0$, illetve $x_2 = \dfrac{1}{2}$ esetén. Ezért x_2 lehetséges inflexiós pont.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2(1-2x)}{(x+1)^4} > 0$, azaz akkor és csakis akkor, ha $1 - 2x > 0$, illetve $x < \dfrac{1}{2}$ esetén. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2(1-2x)}{(x+1)^4} < 0$, azaz akkor és csakis akkor, ha $1 - 2x < 0$, illetve $x > \dfrac{1}{2}$ esetén. Ezért az f függvény konvex a $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ intervallumon és konkáv az $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$ intervallumon. Mivel az f'' függvény $x_2 = \dfrac{1}{2}$-ben előjelet vált, ezért $x_2 = \dfrac{1}{2}$ az f függvény inflexiós pontja, a megfelelő függvényérték pedig

$$f_{inf}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}.$$

10. A függvény grafikonja:



5. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

Megoldás.

1. értelmezési tartomány: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. paritás: A függvény páros, mert

$$f(-x) = \sqrt[3]{1-(-x)^2} = \sqrt[3]{1-x^2} = f(x).$$

3. nullahely: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sqrt[3]{1-x^2} = 0$, azaz ha $1-x^2 = 0$. Az egyenlet megoldása és egyben az f függvény nullahelyei $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.

4. előjel: $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sqrt[3]{1-x^2} > 0$, azaz $1-x^2 > 0$, valamint $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sqrt[3]{1-x^2} < 0$, azaz $1-x^2 < 0$. Az $y = 1-x^2$ parabola $x = -1$-ben és $x = 1$-ben metszi az x-tengelyt, s mivel maximuma van, pozitív $-1 < x < 1$ esetén, negatív $x < -1$ és $x > 1$ esetén.

5. aszimptoták: A függvénynek nincs semmilyen aszimptotája, viszont

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1-x^2} = -\infty.$$

6. szélsőértékek: Az első derivált $f'(x) = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$. $f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $-2x = 0$, tehát $x_3 = 0$ a stacionárius pont. Vegyük észre, hogy az f' deriváltfüggvény nem értelmezett az a D_f értelmezési tartomány $x = 1$ és $x = -1$ pontjaiban.

7. monotonitás: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} > 0$, azaz ha $x < 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} < 0$, azaz ha $x > 0$.

Eszerint az f függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, 0)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(0, \infty)$ intervallumon. A monotonitási tulajdonságból következik, hogy $x_3 = 0$-ban a függvénynek maximuma van és $f_{max}(0) = 1$.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{(1-x^2)^2} - x \cdot \frac{2(-2x)}{3\sqrt[3]{1-x^2}}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}} \cdot \frac{3\sqrt[3]{1-x^2}}{3\sqrt[3]{1-x^2}} =$$

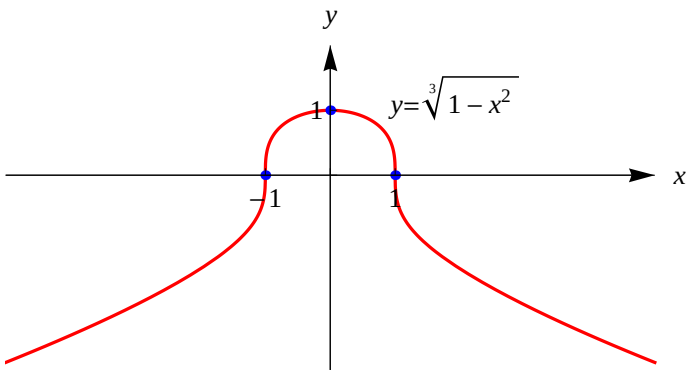
$$= -\frac{2}{3}\frac{3(1-x^2)+4x^2}{3(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = -\frac{2}{9}\frac{3+x^2}{(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = -\frac{2}{9}\frac{(3+x^2)\sqrt[3]{1-x^2}}{(1-x^2)^2}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 = 0$, azaz a nullahelyekben, de ezekben a pontokban sem az f' függvény, sem az f'' függvény nem értelmezett.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 < 0$, azaz $x < -1$ és $x > 1$ esetén. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 < 0$, azaz $-1 < x < 1$ esetén. Ezért az f függvény konvex a $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ intervallumon és konkáv a $(-1, 1)$ intervallumon.

Mivel az f'' függvény $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ pontokban előjelet vált, ezért itt az f függvénynek olyan inflexiós pontjai vannak, amelyekben a az f függvény nem differenciálható, azaz az f függvény grafikonjához nem húzható érintő. Ugyanakkor $f_{inf}(-1) = f_{inf}(1) = 0$

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény páratlan, mert

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -f(x).$$

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$, tehát $x_1 = 0$ a függvény nullahelye.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ ha $x > 0$, illetve $f(x) < 0$ ha $x < 0$.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Nincs, mert a függvény minden valós számra értelmezett.

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 1$ és $y = -1$ vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Nincs, mert van vízszintes aszimptota.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Mivel $f'(x) \neq 0$, az f függvénynek nincs stacionárius pontja, tehát szélsőértéke sem.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ minden $x \in D_f$ esetén, ezért az f függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.

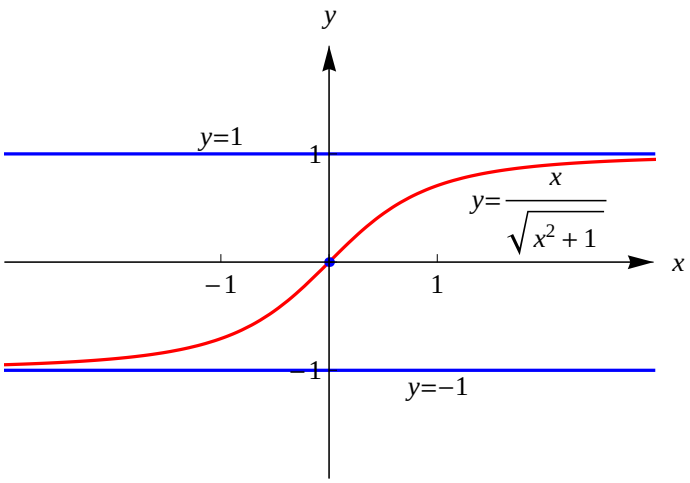
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = \frac{-3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $-3x = 0$, tehát $x_1 = 0$ az f függvény lehetséges inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x < 0$, valamint $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x > 0$. Ezek szerint az f függvény konvex a $(-\infty, 0)$ intervallumon és konkáv a $(0, \infty)$ intervallumon.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



7. $f(x) = x^2 e^{-x^2} = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény páros, mert $f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x^2 e^{-x^2} = 0$, tehát $x_1 = 0$ az egyetlen nullahely.

4. ELŐJEL: $f(x) \geq 0$ ha $x \in D_f$.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Nincs, mert a függvény minden valós számra értelmezett.

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 0$ vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Nincs, mert van vízszintes aszimptota.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \left(x^2 e^{-x^2}\right)' = 2xe^{-x^2} + x^2(-2x)e^{-x^2} = 2x\left(1 - x^2\right)e^{-x^2}.$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(1-x)(1+x) = 0$, tehát $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ és $x_3 = 1$ a stacionárius pontok.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(1-x)(1+x) > 0$, illetve $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(1-x)(1+x) < 0$.

D_f	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$1+x$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

A mellékelt táblázatból leolvasható, hogy a függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ intervallumon.

A táblázatból láthatjuk azt is, hogy a monotonitás alapján az f függvénynek $x_1 = 0$-ban minimuma van, $x_2 = -1$-ben és $x_3 = 1$-ben pedig maximuma van, a megfelelő függvényértékek pedig

$$f_{min}(0) = 0 \quad \text{és} \quad f_{max}(-1) = f_{max}(1) = e^{-1}.$$

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \left(\left(2x - 2x^3\right)e^{-x^2}\right)' = \left(2 - 6x^2\right)e^{-x^2} - 2x\left(2x - 2x^3\right)e^{-x^2} =$$

$$= \left(2 - 10x^2 + 4x^4\right)e^{-x^2} = 2\left(1 - 5x^2 + 2x^4\right)e^{-x^2}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. $x^2 = t$ behelyettesítés után kapjuk a $2t^2 - 5t + 1 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai

$$t_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \approx 2,28 \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \approx 0,22.$$

A visszahelyettesítés után azt kapjuk, hogy a lehetséges inflexiós pontok

$$x_4 = -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}} \approx -1,51, \quad x_5 = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}} \approx -0,47,$$

$$x_6 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}} \approx 0,47, \quad x_7 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}} \approx 1,51.$$

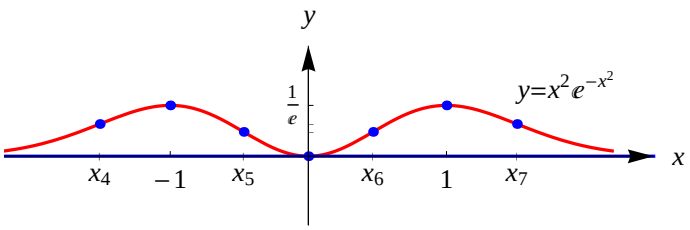
9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x^4 - 5x^2 + 1 > 0$, illetve $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x^4 - 5x^2 + 1 < 0$. Készítsünk táblázatot, felhasználva az előbbi jelöléseket.

D_f	$(-\infty, x_4)$	(x_4, x_5)	(x_5, x_6)	(x_6, x_7)	(x_7, ∞)
$x^2 - t_1$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - t_2$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

A táblázatból megállapíthatjuk, hogy a $(-\infty, x_4) \cup (x_5, x_6) \cup (x_7, \infty)$ intervallumon az f függvény konvex, az $(x_4, x_5) \cup (x_6, x_7)$ intervallumon pedig konkáv. Mivel x_4-ben, x_5-ben, x_6-ban és x_7-ben az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontjai vannak. Egyszerű helyettesítéssel kiszámítható, hogy

$$f_{inf}(x_4) = f_{inf}(x_7) \approx 0,23 \quad \text{és} \quad f_{inf}(x_5) = f_{inf}(x_6) \approx 0,18.$$

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



8. $f(x) = \left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: Mivel az exponenciális függvény kitevőjében levő nevező nem lehet nulla, ezért $x \neq 0$, s így $D_f = R \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény se nem páros, se nem páratlan, mivel

$$f(-x) = \left(-x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{-x}} = \left(-x - \frac{1}{5}\right) e^{-\frac{1}{x}} \neq \pm f(x).$$

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x - \frac{1}{5} = 0$, tehát $x_1 = \frac{1}{5}$ a függvény nullahelye.

4. ELŐJEL: Mivel az exponenciális függvény mindig pozitív, ezért $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x - \frac{1}{5} > 0$, és $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x - \frac{1}{5} < 0$. Az f függvény tehát pozitív $x > \frac{1}{5}$ esetén és negatív $x < \frac{1}{5}$ esetén.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Az $x = 0$ egyenes csak egyoldali függőleges aszimptota, mert

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{5} \cdot e^{-\infty} = -\frac{1}{5} \cdot 0 = 0,$$

tehát balról nézve nem függőleges aszimptota, viszont jobbról nézve igen, mert

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{5} \cdot e^{+\infty} = -\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: Nincs, mert

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Ha $y = kx + n$ alakban keresünk ferde aszimptotát, akkor

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - \frac{1}{5}}{x} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - \frac{1}{5} \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{5} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{5} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Az $y = x + \frac{4}{5}$ egyenes az f függvény ferde aszimptotája.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \left(\frac{5x-1}{5} e^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(1 - \frac{1}{5x^2}(5x-1)\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{5x^2 - 5x + 1}{5x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $5x^2 - 5x + 1 = 0$, tehát az f függvény stacionárius pontjai $x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}$ és $x_3 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}$.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $5x^2 - 5x + 1 > 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $5x^2 - 5x + 1 < 0$. Az f függvény eszerint szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, 0) \cup (0, x_2) \cup (x_3, \infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő az (x_2, x_3) intervallumon.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

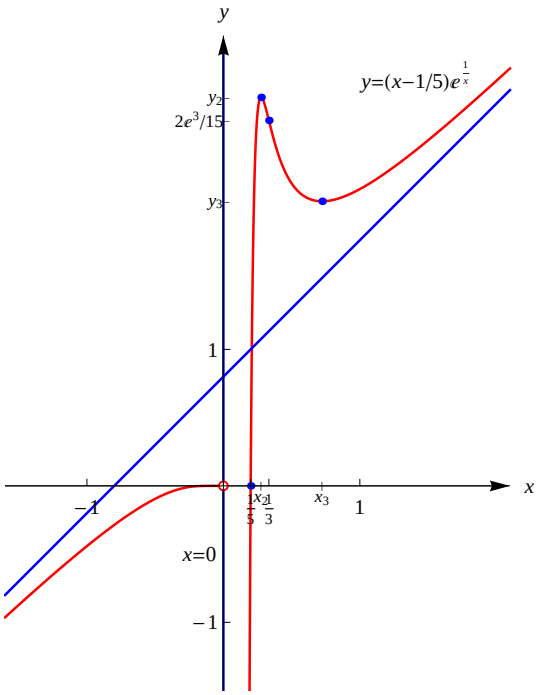
$$f''(x) = \left(\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{5x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}\right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{5x^3}\right) e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{5x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{3x - 1}{5x^4} e^{\frac{1}{x}}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 1 = 0$, azaz $x_4 = \dfrac{1}{3}$ a lehetséges inflexiós pont.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 1 > 0$, azaz ha $x > \dfrac{1}{3}$, valamint $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 1 < 0$, azaz ha $x < \dfrac{1}{3}$. Az f függvény tehát konvex a $\left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ intervallumon és konkáv a $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$ intervallumon. $x_4 = \dfrac{1}{3}$-ban az f'' második deriváltfüggvény előjelet vált, így ez a pont az f függvény inflexiós pontja és $f_{inf}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2e^3}{3}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



9. $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A logaritmus függvény csak pozitív értékekre értelmezett, tehát $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$ kell teljesüljön.

D_f	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x+1}{x-1}$	$+$	$-$	$+$

A mellékelt táblázatból leolvasható, hogy a megoldáshalmaz $x < -1$ és $x > 1$. Ez azt jelenti, hogy

$$D_f = (-\infty,-1) \cup (1,\infty).$$

2. PARITÁS: A függvény páratlan, mert

$$f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x-1} = \ln \frac{x-1}{x+1} = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{-1} = -\ln \frac{x+1}{x-1} = -f(x).$$

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x+1}{x-1} = 1$, azaz $\dfrac{2}{x-1} = 0$. A kapott egyenletnek nincs megoldása, így a függvénynek nincs nullahelye.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ ha $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$, azaz $\dfrac{2}{x-1} > 0$, illetve $f(x) < 0$ ha $\dfrac{x+1}{x-1} < 1$, azaz $\dfrac{2}{x-1} < 0$. A függvény előjele tehát $x-1$ előjelétől függ, így az f függvény akkor pozitív, ha $x > 1$ és akkor negatív, ha $x < -1$.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: $x = -1$ balról nézve, $x = 1$ pedig jobbról nézve függőleges aszimptotája a függvénynek, mert

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \frac{-1-0+1}{-1-0-1} = \ln \frac{-0}{-2-0} = \ln \frac{0}{2+0} = -\infty$$

és

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \frac{1+0+1}{1+0-1} = \ln \frac{2+0}{+0} = +\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 0$ vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \ln 1 = 0.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Nincs, mert van vízszintes aszimptota.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2-1} = \frac{2}{1-x^2} \neq 0.$$

Az f' függvénynek nincs nullahelye, így az f függvénynek nincs stacionárius pontja.

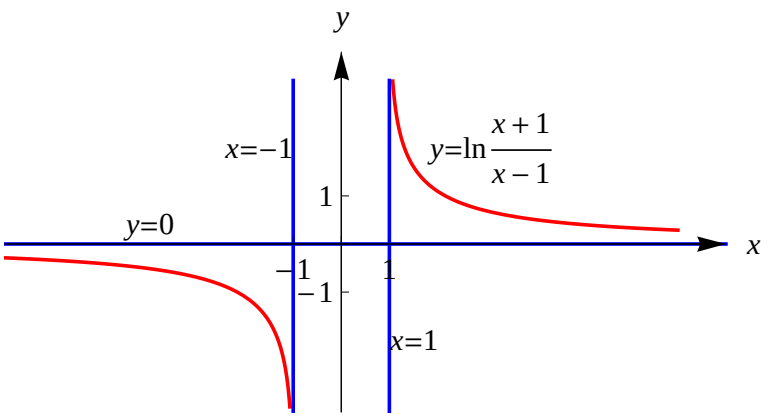
7. MONOTONITÁS: $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 < 0$. Mivel ez a tulajdonság a teljes értelmezési tartományon teljesül, így az f függvény mindehol szigorúan monoton csökkenő.

8. INFLEXIÓS PONTOK: A második derivált $f''(x) = \dfrac{-2 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$.

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $4x = 0$, azaz $x = 0$, de ez a pont nincs benne az f függvény értelmezési tartományában, tehát a függvénynek nincs inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $4x > 0$, illetve $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $4x < 0$. Ez azt jelenti, hogy az f'' függvény pozitív $x > 0$ esetén, és negatív $x < 0$ esetén, vagyis az f függvény konvex az $(1, \infty)$ intervallumon és konkáv a $(-\infty, -1)$ intervallumon.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



10. $f(x) = x \ln^2 x = x\,(\ln x)^2$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A logaritmus függvény csak pozitív értékekre értelmezett, tehát $D_f = (0, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény se nem páros se nem páratlan, mert a függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus az origóra.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x = 0$, azaz $x_1 = 1$ az egyetlen nullahely, hiszen $x = 0$ lenne a másik, de az nem eleme az értelmezési tartománynak.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\,(\ln x)^2 > 0$, ez pedig teljesül az értelmezési tartomány minden pontjára.

5. ASZIMPTOTÁK: A függvénynek se függőleges, se vízszintes, se ferde aszimptotája nincs, viszont

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\,(\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x\,(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} 2x = +0.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = (\ln x)^2 + x \cdot \frac{2}{x} \ln x = \ln x\,(\ln x + 2)$.

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x\,(\ln x + 2) = 0$. A kapott egyenlet megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = e^{-2}$ a lehetséges stacionárius pontok.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x\,(\ln x + 2) > 0$, ugyanakkor $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x\,(\ln x + 2) < 0$.

D_f	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
$\ln x$	$-$	$-$	$+$
$\ln x + 2$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

A mellékelt táblázatból leolvashatjuk a következőket: a függvény szigorúan monoton növekvő a $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő az $(e^{-2}, 1)$ intervallumon.

A táblázatból láthatjuk azt is, hogy a monotonitás alapján az f függvénynek $x_1 = 1$-ben minimuma van, $x_2 = e^{-2}$-ban pedig maximuma van. Számítással kapjuk, hogy $f_{min}(1) = 0$ és $f_{max}\left(e^{-2}\right) = 4e^{-2}$.

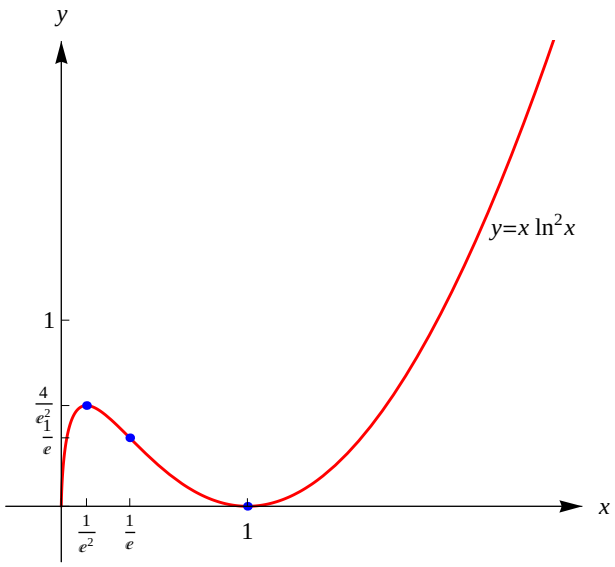
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{2}{x} \ln x + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1).$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x + 1 = 0$, azaz $x_3 = e^{-1}$ a lehetséges inflexiós pont.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x + 1 > 0$, illetve $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x + 1 < 0$. Eszerint az f függvény konvex az $\left(e^{-1}, \infty\right)$ intervallumon, az f függvény pedig konkáv a $\left(-\infty, e^{-1}\right)$ intervallumon. Eszerint $x_3 = e^{-1}$ a függvény inflexiós pontja és $f_{inf}(e^{-1}) = e^{-1}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



5. Egyváltozós valós függvények integrálszámítása

5.1. A határozatlan integrál fogalma

Az eddigiekben megismertük a differenciálás műveletét, melynek alapfeladata: adott f függvényhez megkeresni az f' derivált függvényt. Természetesnek tűnik a fordított probléma tanulmányozása is: keressük azt az F függvényt, melynek ismert az F' derivált függvénye.

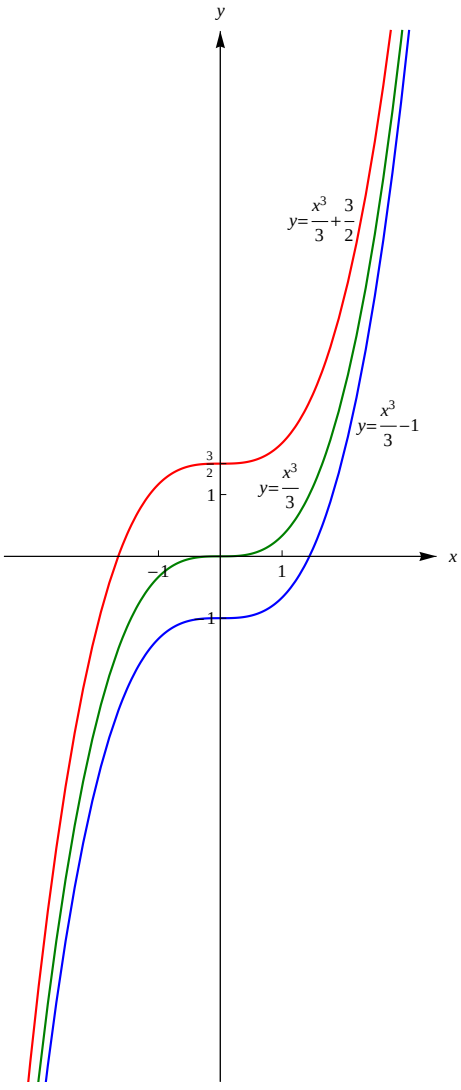
5.1. Példa. Ha tudjuk, hogy $F'(x) = x^2$ érvényes, akkor $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ a keresett függvény, azaz amelyre teljesül, hogy $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$. Viszont F nem az egyetlen ilyen függvény. Például, az

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad F_2(x) = \frac{x^3}{3} - 1$$

függvények ugyanúgy teljesítik a kívánt tulajdonságot, vagyis

$$\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\right)' = x^2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{x^3}{3} - 1\right)' = x^2.$$

A következő ábrán néhány olyan függvény grafikonja látható, amelyeknek $f(x) = x^2$ a deriváltfüggvénye. Figyeljük meg az adott függvénygörbék kölcsönös helyzetét.



5.1. Definíció. *Ha az F függvény differenciálható az $[a, b]$ intervallumon és minden $x \in [a, b]$ esetén $F'(x) = f(x)$, akkor az F függvényt az f függvény primitív függvényének nevezzük az $[a, b]$ intervallumon.*

A fenti példából látható, hogy adott intervallum felett az f függvény primitív függvénye, ha létezik, nem egyértelműen meghatározott.

A következő állítás választ ad arra a kérdésre, hogy egy függvénynek hány primitív függvénye lehet és hogy a adott függvény primitív függvényeinek grafikonjai milyen kölcsönös helyzetben vannak egymással.

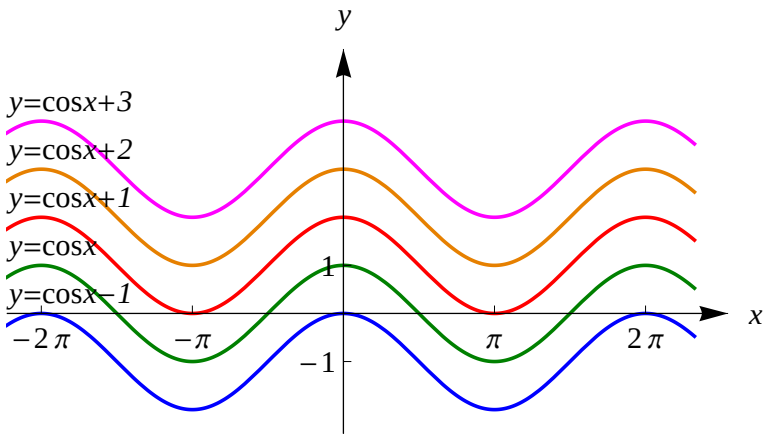
5.1. Tétel. *Ha az F_1 és F_2 függvények az f függvény primitív függvényei az $[a,b]$ intervallumon, akkor van olyan C valós állandó, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $F_1(x) - F_2(x) = C$.*

Bizonyítás. Mivel az F_1 és F_2 függvények az f függvény primitív függvényei az $[a,b]$ intervallumon, ezért évényes, hogy $F_1'(x) = f(x)$ és $F_2'(x) = f(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén. Kivonva a második egyenlőséget az elsőből adódik, hogy

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

azaz, hogy $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén. Ebből az következik, hogy $F_1(x) - F_2(x) = C$ minden $x \in [a,b]$ esetén, ami azt jelenti, hogy adott f függvény primitív függvényei legfeljebb egy állandóban különböznek egymástól. $\diamond$

5.2. Példa. Az $f(x) = -\sin x$ függvény minden primitív függvénye $F(x) = \cos x + C$ alakban írható fel, ahol C tetszőleges konstans. Az ábrán a $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$, $C = 2$ és $C = 3$ eset látható.



A fentiekben említett tulajdonságok geometriai jelentése a következő:

1. Ha síkbeli koordinátarendszerben felrajzoljuk az f függvény egy primitív függvényének grafikonját az $[a,b]$ intervallumon, akkor a sík minden olyan görbéje, amely ebből a görbéből y-tengely menti párhuzamos eltolással átvihető, szintén az f függvény egy primitív függvényének grafikonját képezi az $[a,b]$ intervallumon.

2. Az f függvény összes primitív függvényének grafikonjai az $[a,b]$ intervallumon a fent leírt módon állíthatóak elő.

5.2. Definíció. *Legyen f olyan függvény, amelynek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon. Az f függvény $[a,b]$ intervallumhoz tartozó primitív függvényeinek halmazát az f függvény határozatlan integráljának nevezzük és*

$$\int f(x)dx$$

szimbólummal jelöljük.

Ha F az f függvény egy primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor az $[a,b]$ felett

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C | C \in \mathbf{R}\}.$$

Az egyszerűség kedvéért, ezt úgy szokás írni mint

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

de figyelembe kell venni, hogy ilyen jelölési mód esetén ugyanolyan szimbólumot használunk a halmaz és a halmaz egy eleme esetén is. Az $\int$ szimbólum az integrál jele, $f(x)$ az integrálandó függvény vagy integrandus, az $f(x)dx$ kifejezés pedig az integrál alatti kifejezés.
Figyelembe véve, hogy F az f függvény primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, ami azt jelenti, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $F'(x) = f(x)$, láthatjuk, hogy az $f(x)dx$ integrál alatti kifejezés az F függvény differenciálját jelenti, és érvényes, hogy

$$\int f(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C. \tag{5.1}$$

Mivel

$$d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

adódik, hogy

$$d \int f(x) = f(x)dx. \tag{5.2}$$

A (5.1) és (5.2) egyenlőségek azt mutatják, hogy a differenciálás művelete (a differenciál keresése) és az integrálás művelete (a határozatlan integrál keresése) egymás inverzei, egy tetszőleges konstans pontosságáig.

5.2. A határozatlan integrál alaptulajdonságai

5.2. Tétel. *Ha az f és g függvényeknek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor az $f+g$ függvénynek is van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, mégpedig*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Bizonyítás. Legyen F az f, G pedig a g függvény primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, amiből adódik, hogy

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Ezt azt jelenti, hogy $F(x) + G(x)$ az $f(x) + g(x)$ függvény primitív függvénye. Ezért

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C,$$

ahol C tetszőleges valós állandó. Másfelől

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x)dx = G(x) + C_2,$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges valós állandók, vagyis

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2.$$

Mivel C, C_1 és C_2 tetszőleges valós állandók, az

$$\{F(x) + G(x) + C | C \in \mathbf{R}\} \quad \text{és} \quad \{F(x) + G(x) + C_1 + C_2 | C_1, C_2 \in \mathbf{R}\}$$

függvényhalmazok egyenlőek. Az állítást ezzel beláttuk. $\diamond$

5.3. Tétel. *Ha az f függvénynek van primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon és $\alpha \in \mathbf{R}$, akkor az αf függvénynek is van primitív függvénye az adott intervallumon, mégpedig*

$$\int (\alpha f(x))dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Bizonyítás. Legyen F az f függvény primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor minden $x \in [a, b]$ esetén teljesül, hogy $F'(x) = f(x)$, vagyis $(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$. Ezért

$$\int (\alpha f(x))dx = \alpha F(x) + C_1,$$

ahol C_1 tetszőleges valós állandó. Másfelől

$$\int f(x)dx = F(x) + C_2,$$

ahol C_2 tetszőleges valós állandó, azaz

$$\alpha \int f(x)dx = \alpha(F(x) + C_2) = \alpha F(x) + \alpha C_2.$$

Az

$$\{\alpha F(x) + C_1 | C_1 \in \mathbf{R}\} \quad \text{és} \quad \{\alpha F(x) + \alpha C_2 | C_2 \in \mathbf{R}\}$$

függvényhalmazok egyenlőek. Az állítást ezzel beláttuk. $\diamond$

5.1. Következmény. *Ha az f és g függvényeknek van primitív függvényük az $[a, b]$ intervallumon, α és β pedig nullától különböző valós számok, akkor az $\alpha f + \beta g$ függvénynek is van primitív függvénye $[a, b]$ intervallumon, mégpedig*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Alapintegrálok táblázata

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

9. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad |x| < 1$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C = \operatorname{arsh} x + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} \operatorname{arch} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C, & x > 1; \\ \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C, & x < -1. \end{cases}$

18. $\int \frac{dx}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + C = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C, & |x| < 1; \\ \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C, & |x| > 1. \end{cases}$

A határozatlan integrálok megoldása során minden esetben feltételezzük, hogy az integrálás folyamatában megjelenő függvények értelmezési tartományán keressük a primitív függvényt.

FELADATOK.

Határozzuk meg a következő integrálok megoldását.

1. $\int 2x^5 dx$

Megoldás.

$$\int 2x^5 dx = 2\int x^5 dx = 2 \cdot \frac{x^6}{6} + C = 3x^6 + C.$$

2. $\int \frac{3dx}{x}$

Megoldás.

$$\int \frac{3dx}{x} = 3\int \frac{dx}{x} = 3\ln|x| + C.$$

3. $\int \frac{-2dx}{x^5}$

Megoldás.

$$\int \frac{-2dx}{x^5} = -2\int x^{-5} dx = -2 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{2x^4} + C.$$

4. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

Megoldás.

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C.$$

5. $\int \frac{4dx}{\sqrt[7]{x^3}}$

Megoldás.

$$\int \frac{4dx}{\sqrt[7]{x^3}} = 4 \cdot \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = 4 \cdot \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C = 7\sqrt[7]{x^4} + C.$$

6. $\int \frac{x^2\sqrt{x^3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^2\sqrt{x^3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^2\sqrt{x^2\sqrt[3]{x}} dx = \int x^3\sqrt[6]{x} dx =$$

$$= \int x^{\frac{19}{6}} dx = \frac{x^{\frac{25}{6}}}{\frac{25}{6}} + C = \frac{6}{25}\sqrt[6]{x^{25}} + C = \frac{6}{25}x^4\sqrt[6]{x} + C.$$

7. $\int (2\sin x - 3\cos x)\,dx$

Megoldás.

$$\int (2\sin x - 3\cos x)\,dx = 2\int \sin x dx - 3\int \cos x dx =$$

$$= 2(-\cos x) - 2\sin x + C = -2\cos x - 3\sin x + C.$$

8. $\int \left(e^x - 2^{x+1} + 3^{x-2}\right)dx$

Megoldás.

$$\int \left(e^x - 2^{x+1} + 3^{x-2}\right)dx = \int e^x dx - 2\int 2^x dx + \frac{1}{9}\int 3^x dx =$$

$$= e^x - 2\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C = e^x - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + \frac{3^{x-2}}{\ln 3} + C.$$

9. $\int \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{3x^2}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{3x^2}dx = \frac{1}{3}\int \left(x + 1 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\cdot x - \ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

10. $\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x + x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{7}{6}} - x^{\frac{1}{6}}\right)dx = \frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13} - \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + C = \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C.$$

11. $\int \frac{3\cdot 5^x - 4\cdot 3^x}{5^x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{3\cdot 5^x - 4\cdot 3^x}{5^x}dx = \int \left(3 - 4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)dx = 3\int dx - 4\int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx =$$

$$= 3x - 4\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\frac{3}{5}} + C = 3x - \frac{4\cdot 3^x}{(\ln 3 - \ln 5)\cdot 5^x} + C.$$

12. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

13. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \int x^{-2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} + \operatorname{arctg} x + C = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C.$$

14. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

Megoldás.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

16. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}x + C = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + x) + C.$$

17. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}dx = \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x}dx =$$

$$= \int (\cos x + \sin x)dx = \int \cos x dx + \int \sin x dx = \sin x - \cos x + C.$$

18. $\int 3a^x \left(e^x - a^{-x}\right) dx$

Megoldás.

$$\int 3a^x \left(e^x - a^{-x}\right) dx = 3\int \left(a^x e^x - 1\right) dx = 3\int (ae)^x \, dx - 3\int dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{(ae)^x}{\ln ae} - 3x + C = \frac{3a^x e^x}{1 + \ln a} - 3x + C.$$

19. $\int \operatorname{sh} x dx$

Megoldás.

$$\int \operatorname{sh} x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\int e^x dx - \frac{1}{2}\int \left(e^{-1}\right)^x dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\frac{(e^{-1})^x}{\ln e^{-1}} + C = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C = \operatorname{ch} x + C.$$

20. $\int \frac{x^4 + 2x^2}{3x^2 + 3} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^4 + 2x^2}{3x^2 + 3} dx = \int \frac{(x^4 + 2x^2 + 1) - 1}{3(x^2 + 1)} dx = \frac{1}{3}\int \frac{(x^2 + 1)^2 - 1}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(x^2 + 1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + x - \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

21. $\int \frac{8}{1 - \cos 4x} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{8}{1 - \cos 4x} dx = 8\int \frac{1}{2\sin^2 2x} dx = 4\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(2\sin x \cos x)^2} dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

22. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx$

Megoldás.

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \int (1 + \sin x) \, dx = x - \cos x + C.$$

23. $\displaystyle\int \frac{1-3\sin^2 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1-3\sin^2 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}dx=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-3\sin^2 x}{\cos^2 x\,(1-\cos^2 x)}dx=\int \frac{\cos^2 x-2\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx=$$

$$=\int \frac{dx}{\sin^2 x}-2\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{ctg} x-2\operatorname{tg} x+C.$$

24. $\displaystyle\int 3^x 2^{-3x}dx$

Megoldás.

$$\int 3^x 2^{-3x}dx=\int \frac{3^x}{8^x}dx=\int \left(\frac{3}{8}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{3}{8}\right)^x}{\ln\frac{3}{8}}+C=\frac{3^x 2^{-3x}}{\ln 3-\ln 8}+C.$$

25. $\displaystyle\int e^{2x+5}dx$

Megoldás.

$$\int e^{2x+5}dx=e^5\int \left(e^2\right)^x dx=e^5\cdot\frac{(e^2)^x}{\ln e^2}+C=\frac{1}{2}e^{2x+5}+C.$$

26. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}dx=\frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C.$$

27. $\displaystyle\int \left(9+9x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$

Megoldás.

$$\int \left(9+9x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int \frac{dx}{\sqrt{9+9x^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arsh} x+C=\frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C.$$

28. $\displaystyle\int \frac{x^3-2\sqrt{1-x^2}}{x^3\sqrt{1-x^2}}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^3-2\sqrt{1-x^2}}{x^3\sqrt{1-x^2}}dx=\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{x^3}\right)dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-2\int x^{-3}dx=$$

$$=\arcsin x-2\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C=\arcsin x+\frac{1}{x^2}+C.$$

29. $\int \frac{5+5x^2-\sqrt[3]{x^2}}{(1+x^2)\sqrt[3]{x^2}}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{5+5x^2-\sqrt[3]{x^2}}{(1+x^2)\sqrt[3]{x^2}}dx = 5\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} - \int \frac{dx}{1+x^2} = 5\int x^{-\frac{2}{3}}dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= 5\cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - \operatorname{arctg} x + C = 15\sqrt[3]{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

30. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^4+x^2)-x^2}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int x^2dx - \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \frac{x^3}{3} - \int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

5.3. Integrálási módszerek

5.3.1. Helyettesítési módszer

Helyettesítési módszernek nevezzük azt az integrálási módszert, amelyet az összetett függvény differenciálásából vezetünk le.

5.4. Tétel. *Ha az f függvénynek van F primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon és $\varphi : [\alpha,\beta] \mapsto [a,b]$ folytonosan differenciálható függvény az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, azaz $x=\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, akkor az $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ függvénynek van $F(\varphi(t))$ primitív függvénye az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, ezért $[\alpha,\beta]$-n*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C\ .$$

Bizonyítás. Az $F(\varphi(t))$ összetett függvény differenciálható és igaz, hogy

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t)\ .$$

Mivel F az f függvény primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, ezért $t\in[\alpha,\beta]$ esetén $\varphi(t)\in[a,b]$, azaz $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$ az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, ahonnan az állítás következik. ◇

FELADATOK.

Oldjuk meg helyettesítéssel a következő határozatlan integrálokat.

1. $\int (ax+b)^n\,dx$, $n \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbf{R}$

Megoldás. Bevezetve az $ax+b=t$, $adx=dt$, $dx=\dfrac{dt}{a}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\int t^n dt = \frac{1}{a}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C.$$

2. $\int \dfrac{dx}{3x+4}$

Megoldás. Alkalmazva a $3x+4=t$, $3dx=dt$, $dx=\dfrac{dt}{3}$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{3x+4} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t|+C = \frac{1}{3}\ln|3x+4|+C.$$

3. $\int \dfrac{dx}{x^2+9}$

Megoldás. Kiemelve 9-et a nevezőből és rendezve az integrandust jön, hogy

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}.$$

Vezessük be most az $\frac{x}{3}=t$, $dx=3dt$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{3dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t+C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$$

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Megoldás. Kiemelve 2-t a nevezőből és rendezve az integrandust következik:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}.$$

Vezessük be most az $\frac{x}{2}=t$, $dx=2dt$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t+C = \arcsin\frac{x}{2}+C.$$

5. $\int e^{2x+5}dx$

Megoldás. Bevezetve a $2x+5=t$, $2dx=dt$, $dx=\dfrac{dt}{2}$ helyettesítést adódik:

$$\int e^{2x+5}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t+C = \frac{1}{2}e^{2x+5}+C.$$

6. $\int 5\sin(5x+3)dx$

Megoldás. Bevezetve a $5x+3=t$, $5dx=dt$, $dx=\dfrac{dt}{5}$ helyettesítést kapjuk:

$$\int 5\sin(5x+3)dx = 5\cdot\frac{1}{5}\int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(5x+3)+C.$$

7. $\displaystyle\int \frac{3dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)}$

Megoldás. Bevezetve a $3x-\dfrac{\pi}{2}=t$, $3dx=dt$ helyettesítést az integrál megoldása:

$$\int \frac{3dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+C.$$

8. $\int a^{px+q}dx$, $a\in\mathbf{R}^+$, $p\in R\setminus\{0\}$, $q\in\mathbf{R}$

Megoldás. Vezessük be a $px+q=t$, $pdx=dt$, $dx=\dfrac{dt}{p}$ helyettesítést. Ekkor

$$\int a^{px+q}dx = \frac{1}{p}\int a^t dt = \frac{1}{p}\cdot\frac{a^t}{\ln a}+C = \frac{a^{px+q}}{p\ln a}+C.$$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

Megoldás. Egészítsük ki teljes négyzetté a nevezőben levő másodfokú kifejezést. Ekkor

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}.$$

Kiemelve 4-et a nevezőből kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}.$$

Bevezetve a $\dfrac{x+1}{2}=t$, $\dfrac{1}{2}dx=dt$, $dx=2dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{2dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

Megoldás. Bevezetve a $2-3x=t$, $-3dx=dt$, $dx=-\dfrac{dt}{3}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2}+C = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2-3x)^2}+C.$$

11. $\int \frac{2xdx}{x^2+3}$

Megoldás. Bevezetve a $x^2+3=t$, $2xdx=dt$ helyettesítést következik:

$$\int \frac{2xdx}{x^2+3} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+3) + C.$$

12. $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$

Megoldás. Bevezetve a $x^3+1=t$, $3x^2dx=dt$, $x^2dx=\frac{dt}{3}$ helyettesítést adódik:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{9}t\sqrt{t} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)\sqrt{x^3+1} + C.$$

13. $\int \frac{2x-4}{x^2-4x}dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az $x^2-4x=t$, $(2x-4)dx=dt$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{2x-4}{x^2-4x}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2-4x| + C.$$

14. $\int \frac{9t^2+12t+15}{t^3+2t^2+5t+1}dt$

Megoldás. Emeljünk ki 3-at a számlálóból az integrál elé. Ekkor

$$\int \frac{9t^2+12t+15}{t^3+2t^2+5t+1}dt = 3\int \frac{3t^2+4t+5}{t^3+2t^2+5t+1}dt.$$

Bevezetve a $t^3+2t^2+5t+1=z$, $(3t^2+4t+5)dt=dz$ helyettesítést következik, hogy

$$\int \frac{9t^2+12t+15}{t^3+2t^2+5t+1}dt = 3\int \frac{dz}{z} = 3\ln|z| + C = 3\ln|t^3+2t^2+5t+1| + C.$$

15. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

Megoldás. Bevezetve a $\ln x=t$, $\frac{dx}{x}=dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

16. $\int x^3 e^{-x^4} dx$

Megoldás. Bevezetve a $-x^4 = t$, $-4x^3 dx = dt$, $x^3 dx = -\frac{dt}{4}$ helyettesítést jön, hogy

$$\int x^3 e^{-x^4} dx = -\frac{1}{4}\int e^t dt = -\frac{1}{4}e^t + C = -\frac{1}{4}e^{-x^4} + C = -\frac{1}{4e^{x^4}} + C.$$

17. $\int \frac{\sin x dx}{3 - 2\cos x}$

Megoldás. Bevezetve a $3 - 2\cos x = t$, $2\sin x dx = dt$, $\sin x dx = \frac{dt}{2}$ helyettesítést adódik:

$$\int \frac{\sin x dx}{3 - 2\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|3 - 2\cos x| + C.$$

18. $\int \operatorname{tg} 3x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ trigonometriai azonosságot. Ekkor

$$\int \operatorname{tg} 3x dx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx.$$

Bevezetve a $\cos 3x = t$, $-3\sin 3x dx = dt$, $\sin 3x dx = -\frac{dt}{3}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \operatorname{tg} 3x dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C.$$

19. $\int \frac{\sin 2x}{\pi + \sin^2 x} dx$

Megoldás. Bevezetve a

$$\pi + \sin^2 x = t, \quad 2\sin x\cos x dx = dt, \quad \sin 2x dx = dt$$

helyettesítést következik, hogy

$$\int \frac{\sin 2x}{\pi + \sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(\pi + \sin^2 x) + C.$$

20. $\int \frac{\sin x dx}{2\left(\sin^2\frac{x}{2} - 1\right)} dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ trigonometriai azonosságot és rendezzük az integrandust. Ekkor

$$\int \frac{\sin x dx}{2\left(\sin^2\frac{x}{2} - 1\right)} dx = \int \frac{\sin x dx}{2\left(\frac{1-\cos x}{2} - 1\right)} dx = \int \frac{\sin x dx}{-1 - \cos x} dx.$$

Bevezetve a $-1-\cos x=t$, $\sin x dx=dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{\sin x dx}{2\left(\sin^2\frac{x}{2}-1\right)}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|-1-\cos x|+C=\ln|1+\cos x|+C.$$

21. $\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

Megoldás. Bővítsük az integrandust $\sin x+\cos x$-el, majd rendezzük. Ekkor

$$\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=$$

$$\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int\frac{-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}dx=-\int\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx.$$

Alkalmazva a $1+\sin 2x=t$, $2\cos 2x dx=dt$, $\cos 2x dx=\dfrac{dt}{2}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln|1+\sin 2x|+C.$$

22. $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}dx$

Megoldás. Bevezetve a

$$2\sin^2 x+3\cos^2 x=t,\quad -2\sin x\cos x dx=dt,\quad \sin x\cos x dx=-\frac{dt}{2}$$

helyettesítést az integrál megoldása:

$$\int\frac{\sin x\cos x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}dx=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left(2\sin^2 x+3\cos^2 x\right)+C.$$

23. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$

Megoldás. Alkalmazzuk először a nevezőben a $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ azonosságot. Ekkor

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}.$$

Bevezetve az $\dfrac{x}{2}=t$, $dx=2dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{2dt}{2\sin t\cos t}=\int\frac{dt}{\sin t\cos t}.$$

Egyszerűsítsük most az integrandust $\cos^2 t$-vel. Ekkor

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t\cos t}{\cos^2 t}}=\int\frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t}{\cos t}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t\ \mathrm{tg}\, t}.$$

Bevezetve most a $\mathrm{tg}\, t=z$, $\dfrac{dt}{\cos^2 t}=dz$ helyettesítés kapjuk, hogy

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln|\mathrm{tg}\, t|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|+C.$$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$

Megoldás. Bevezetve a $\arcsin x = t$, $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\arcsin x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{\arcsin x}+C.$$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

Megoldás. Alakítsuk át először az integrandust:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}.$$

Bevezetve az $x-1=t$, $dx=dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(x-1) + C.$$

26. $\displaystyle\int \sin^4 x \sin 2x dx$

Megoldás. Felhasználva a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ trigonometriai azonosságot és bevezetve a $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$ helyettesítést következik, hogy

$$\int \sin^4 x \sin 2x dx = 2\int \sin^5 x \cos x dx = 2\int t^5 dt = 2\frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{3}\sin^6 x + C.$$

27. $\displaystyle\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$

Megoldás. Bevezetve az

$$\ln \operatorname{tg} x = t, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = dt, \quad \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{dt}{2}$$

helyettesítést az integrál a következőképpen oldható meg:

$$\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2}\int t dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} + C = \frac{t^2}{4} + C = \frac{(\ln \operatorname{tg} x)^2}{4} + C.$$

28. $\displaystyle\int \frac{\ln x\sqrt{\ln x}}{x} dx$

Megoldás. Bevezetve az $\ln x = t$, $\dfrac{dx}{x} = dt$ helyettesítést adódik:

$$\int \frac{\ln x\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int t\sqrt{t} dt = \int t^{\frac{3}{2}} dt =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + C = \frac{2}{5}t^2\sqrt{t} + C = \frac{2}{5}\ln^2 x\sqrt{\ln x} + C.$$

29. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

Megoldás. Alakítsuk át az integrandust:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x}{1-x}}dx = \int \sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}dx =$$

$$= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bevezetve a második integrálban az $1-x^2=t$, $-2xdx=dt$, $xdx=-\frac{dt}{2}$ helyettesítést következik:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \arcsin x + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = \arcsin x + \sqrt{t} + C = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

30. $\int \sqrt{1-x^2}dx$

Megoldás. Bevezetve az $t=\arcsin x$, $x=\sin t$, $dx=\cos t dt$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt =$$

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt.$$

Alkalmazzuk a második integrálban most a $2t=z$, $2dt=dz$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \cos z dz = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin z + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C.$$

Mivel

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t},$$

a megoldás visszahelyettesítés után

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

5.3.2. Parciális integrálás módszere

A parciális integrálás módszere két függvény szorzatának differenciálási szabályából vezethető le.

5.5. Tétel. *Ha u és v folytonosan differenciálható függvények az $[a,b]$ intervallumon, akkor az $[a,b]$ intervallumon érvényes, hogy*

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Bizonyítás. Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett u és v függvények szorzatának deriváltját az

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

formula adja, a szorzat differenciálját pedig

$$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x).$$

Ha az u és v függvények folytonosan differenciálhatók, akkor igaz, hogy

$$u(x)v(x) + C = \int v(x)du(x) + \int u(x)dv(x).$$

Ebből, figyelembe véve, hogy a határozatlan integrál két tetszőleges konstanst is tartalmaz, a C konstanst kihagyhatjuk, s az $[a, b]$ intervallumra igaz lesz, hogy

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x),$$

ahonnan az állítás következik. $\diamond$

Ily módon az $u(x)v'(x)$ függvény primitív függvényének megtalálása visszavezetődik egy részleges integrálásra és a $v(x)u'(x)$ függvény primitív függvényének meghatározására. A fenti tétel alapján végzett integrálási módszert nevezzük parciális integrálásnak. Az egyszerűség kedvéért a parciális integrálás alkalmazásánál a formulából szokás kihagyni az argumentumot. A formula ekkor:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

FELADATOK

Határozzuk meg a parciális integrálás módszerével az alábbi határozatlan integrálok megoldását.

1. $\int xe^x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = x, \quad dv = e^x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

2. $\int x \sin x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = x, \quad dv = \sin x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást kapjuk, hogy

$$\int x \sin x dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

3. $\int (3x+1)\cos 2x dx$

Megoldás. Ha

$$u = 3x+1, \quad dv = \cos 2x dx, \quad \text{akkor} \quad du = 3dx, \quad v = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

ahol v kiszámításánál a $2x = t$, $2dx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést és az alábbi számítást alkalmazzuk:

$$v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int (3x+1)\cos 2x dx = \frac{3x+1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\cdot \sin 2x \cdot 3dx = \frac{3x+1}{2}\sin 2x - \frac{3}{2}\int \sin 2x dx.$$

Alkalmazva a kapott integrálban a $2x = t$, $2dx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést adódik:

$$\int (3x+1)\cos 2x dx = \frac{3x+1}{2}\sin 2x - \frac{3}{4}\int \sin t dt =$$

$$= \frac{3x+1}{2}\sin 2x - \frac{3}{4}(-\cos t) + C = \frac{3x+1}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C.$$

4. $\int x\,\mathrm{sh}\, x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = x, \quad dv = \mathrm{sh}\, x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = \int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást jön, hogy

$$\int x\,\mathrm{sh}\, x dx = x\,\mathrm{ch}\, x - \int \mathrm{ch}\, x dx = x\,\mathrm{ch}\, x - \int \mathrm{ch}\, x dx = x\,\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x + C.$$

5. $\int x\sin^2 x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ trigonometriai azonosságot. Ekkor

$$\int x\sin^2 x dx = \int x\cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int x dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx.$$

Ha most a második integrálban

$$u = x, \quad dv = \cos 2x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

akkor behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik:

$$\int x\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x + C = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

6. $\int \ln x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

7. $\int \operatorname{arctg} x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást kapjuk, hogy

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Bevezetve a kapott integrálban az $1 + x^2 = t$, $2dx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést kapjuk a megoldást:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

8. $\int \arcsin 3x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \arcsin 3x, \quad dv = dx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}, \quad v = x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int \arcsin 3x dx = x\arcsin 3x - 3\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$$

Bevezetve a kapott integrálban az $1-9x^2=t^2$, $\sqrt{1-9x^2}=t$, $-18xdx=2tdt$, $xdx=-\dfrac{tdt}{9}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \arcsin 3x dx = x\arcsin 3x + \frac{3}{9}\int \frac{tdt}{t} = x\arcsin 3x + \frac{1}{3}\int dt + C =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{3}t + C = x\arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + C.$$

9. $\displaystyle\int x\ln x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u=\ln x, \quad dv=xdx, \quad \text{akkor} \quad du=\frac{1}{x}dx, \quad v=\int xdx=\frac{x^2}{2}.$$

Helyettesítsünk be a parciális integrálás képletébe és végezzük el az integrálást. Ekkor

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

10. $\displaystyle\int x^3\ln x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u=\ln x, \quad dv=x^3dx, \quad \text{akkor} \quad du=\frac{1}{x}dx, \quad v=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást kapjuk, hogy

$$\int x^3\ln x dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

11. $\displaystyle\int \ln\left(1+x^2\right)dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u=\ln\left(1+x^2\right), \quad dv=dx, \quad \text{akkor} \quad du=\frac{2x}{1+x^2}dx, \quad v=x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int \ln\left(1+x^2\right)dx = x\ln\left(1+x^2\right) - \int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int dx + 2\int\frac{1}{1+x^2}dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C.$$

12. $\int x\operatorname{arctg} x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = xdx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást jön, hogy

$$\int x\operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \operatorname{arctg} x + C.$$

13. $\int x\arcsin x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \arcsin x, \quad dv = xdx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik, hogy

$$\int x\arcsin x dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

A helyettesítési módszerrel megoldott feladatsor 30. feladata alapján

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2},$$

ezért következik, hogy

$$\int x\arcsin x dx = \frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

14. $\int x\sin x\cos x dx$

Megoldás. Alkalmazva a $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ trigonometriai azonosságot kapjuk, hogy

$$\int x\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x dx.$$

Ha

$$u = x, \quad dv = \sin 2x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x,$$

akkor behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik:

$$\int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C.$$

15. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = x, \quad dv = \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{\sin x},$$

ahol v kiszámítása a $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ helyettesítés bevezetésével történt:

$$v = \int dv = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{\sin x}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást kapjuk a megoldást:

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}dx.$$

Felhasználva a helyettesítési módszerrel megoldott feladatsor 23. feladatának eredményét, miszerint

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

kapjuk, hogy

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{x}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

16. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \sqrt{x}dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}\,(\ln x - 2) + C.$$

17. $\int x\ln^2 x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \ln^2 x, \quad dv = xdx, \quad \text{akkor} \quad du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik:

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \ln x dx.$$

Felhasználva a parciális integrálás módszerével megoldott feladatsor 9. feladatának eredményét, miszerint

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C,$$

kapjuk, hogy

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C.$$

18. $\int e^x \cos x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \cos x, \quad dv = e^x dx, \quad \text{akkor} \quad du = -\sin x dx, \quad v = e^x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe következik, hogy

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

Alkalmazzuk most újra a kapott integrálban a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \sin x, \quad dv = e^x dx, \quad \text{akkor} \quad du = \cos x dx, \quad v = e^x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe most azt kapjuk, hogy

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

azaz ugyanazt az integrált kaptuk, amelyből kiindultunk. Ekkor

$$2I = e^x \cos x + e^x \sin x,$$

ahonnan

$$I = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

19. $\int 3^{2x} \sin(3x+1) dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = 3^{2x}, \quad dv = \sin(3x+1)dx, \quad \text{akkor} \quad du = 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos(3x+1).$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe adódik, hogy

$$I = \int 3^{2x} \sin(3x+1) dx = -\frac{1}{3} \cdot 3^{2x} \cdot \cos(3x+1) + \frac{2 \ln 3}{3} \int 3^{2x} \cos(3x+1) dx.$$

Alkalmazzuk most újra a kapott integrálban a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = 3^{2x}, \quad dv = \cos(3x+1)dx, \quad \text{akkor} \quad du = 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 dx, \quad v = \frac{1}{3}\sin(3x+1).$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe most azt kapjuk, hogy

$$I = -\frac{1}{3}\cdot 3^{2x}\cdot\cos(3x+1)+\frac{2\ln 3}{3}\left(\frac{1}{3}\cdot 3^{2x}\cdot\sin(3x+1) - \int \frac{2\ln 3}{3}\cdot 3^{2x}\cdot\sin(3x+1)dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 3^{2x}\cdot\cos(3x+1) + \frac{2\ln 3}{9}\cdot 3^{2x}\cdot\sin(3x+1) - \frac{4\ln^2 3}{9}I,$$

azaz ugyanazt az integrált kaptuk, amelyből kiindultunk. Ekkor

$$\left(1+\frac{4\ln^2 3}{9}\right)I = -\frac{1}{3}\cdot 3^{2x}\cdot\cos(3x+1) + \frac{2\ln 3}{9}\cdot 3^{2x}\cdot\sin(3x+1),$$

ahonnan

$$I = \frac{9\cdot 3^{2x}}{9+4\ln^2 3}\left(\frac{2\ln 3}{9}\sin(3x+1) - \frac{1}{3}\cos(3x+1)\right) + C =$$

$$= \frac{3^{2x}}{9+4\ln^2 3}\left(2\ln 3\ \sin(3x+1) - 3\cos(3x+1)\right) + C.$$

20. * $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x^2) - 2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx$

Megoldás. Rendezzük az integrandust az alábbi módon:

$$I = \int \frac{\ln(1+x^2) - 2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2x}\ln\left(1+x^2\right) - \operatorname{arctg} x\right)\frac{2x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx.$$

Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \frac{1}{2x}\ln\left(1+x^2\right) - \operatorname{arctg} x, \quad dv = \frac{2x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx,$$

akkor

$$du = -\frac{1}{2x^2}\ln\left(1+x^2\right)dx, \quad v = -\frac{1}{\ln(1+x^2)},$$

ahol v kiszámítása a $\ln(1+x^2) = t$, $\dfrac{2xdx}{1+x^2} = dt$ helyettesítéssel történt:

$$v = \int dv = \int \frac{2x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln(1+x^2)} + C.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik, hogy

$$I = \left(\frac{1}{2x}\ln\left(1+x^2\right) - \operatorname{arctg} x\right)\left(-\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right) -$$

$$-\int\left(-\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right)\left(-\frac{1}{2x^2}\ln\left(1+x^2\right)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} + \frac{1}{2x} + C = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} + C.$$

5.4. Racionális és racionalizálható integrálok

5.4.1. Racionális függvények integrálása

5.3. Definíció. *Racionális törtfüggvénynek vagy röviden racionális törtnek nevezzük két polinom, például $P(x)$ és $Q(x)$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ hányadosát, ahol a $Q(x)$ osztópolinom nem a nullapolinom.*

Racionális törtfüggvényekkel ugyanolyan szabályok szerint végzünk műveleteket, mint a racionális számokkal. A racionális törtek egyenlőségét ugyanúgy értelmezzük, mint a törtek egyenlőségét az elemi aritmetikában. A továbbiakban csak valós együtthatós racionális törtekkel fogunk foglalkozni.

5.4. Definíció. *Rövidíthetetlennek nevezünk egy racionális törtet, ha számlálója relatív prím a nevezőjéhez.*

5.6. Tétel. *Minden racionális tört egyenlő egy rövidíthetetlen törttel, mely a számláló és nevező nulladfokú közös tényezőitől eltekintve, egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Bármely racionális törtet egyszerűsíthetjük számlálójának és nevezőjének legnagyobb közös osztójával, miáltal egy az eredetivel egyenlő rövidíthetetlen törtet kapunk. Ha továbbá a $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ és a $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ rövidíthetetlen törtek egyenlők egymással, azaz $P(x)\psi(x) = Q(x)\varphi(x)$, akkor $P(x)$ és $Q(x)$ relatív prím voltából következik, hogy $\varphi(x)$ osztható a $P(x)$ polinommal, $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ relatív prím voltából pedig következik, hogy $P(x)$ osztható $\varphi(x)$-szel. Eszerint $P(x) = C\varphi(x)$, akkor viszont $Q(x) = C\psi(x)$ is következik. $\diamond$

5.5. Definíció. *Nevezzünk egy racionális törtet szabályosnak vagy valódinak, ha számlálójának fokszáma alacsonyabb, mint a nevezőjéé.*

Ha megegyezés szerint a szabályos törtek közé számítjuk a nullapolinomot is, akkor érvényes a következő állítás:

5.7. Tétel. *Minden racionális tört egyértelműen előállítható egy polinom és egy szabályos tört összegeként.*

Bizonyítás. Ha adott a $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ racionális tört, s ha a számlálót a nevezővel osztva az

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$$

egyenlőséget nyerjük, ahol $R(x)$ fokszáma kisebb, mint $Q(x)$-é, akkor könnyű belátni, hogy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Ha továbbá fennáll az

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \bar{S}(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

egyenlőség, ahol $\varphi(x)$ fokszáma kisebb $\psi(x)$ fokszámánál, akkor a két egyenlet kivonásával kapjuk, hogy

$$S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} - \bar{S}(x) - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0,$$

ahonnan

$$S(x) - \bar{S}(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{R(x)}{Q(x)},$$

ebből pedig

$$S(x) - \bar{S}(x) = \frac{\varphi(x)Q(x) - \psi(x)R(x)}{\psi(x)Q(x)}.$$

Minthogy most a bal oldalon polinom áll, a jobb oldalon pedig szabályos tört, amiről könnyű meggyőződni, azért szükségképpen $S(x) = \bar{S}(x)$ és

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{R(x)}{Q(x)} = 0.$$

◇

A szabályos racionális törteket további vizsgálatnak vethetjük alá. Először is emlékeztetünk arra, hogy az *irreducibilis valós polinomok* $x - a$ alakú lineáris polinomok lehetnek, ahol a valós szám, illetve $x^2 - px + q$ alakú másodfokú polinomok, ahol $p, q \in \mathbf{R}$ és $p^2 - 4q < 0$. Az irreducibilis valós másodfokú polinomoknak nincsenek valós gyökei.

5.6. Definíció. *A* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *szabályos racionális törtet elemi törtnek nevezzük, ha nevezője,* $Q(x)$ *valamely irreducibilis* $p(x)$ *polinom hatványa,*

$$Q(x) = p^k(x) \quad (k \geq 1),$$

a számláló $P(x)$ *pedig alacsonyabb fokú, mint* $p(x)$.

5.3. Példa. Néhány elemi tört: $\dfrac{1}{x-2}$, $\dfrac{2}{(x+1)^3}$, $\dfrac{\pi}{x^2+1}$, $\dfrac{-5x}{x^2+x+1}$, $\dfrac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$.

Érvényes a következő állítás, amit bizonyítás nélkül fogunk megadni:

5.8. Tétel. *Minden szabályos racionális tört egyértelműen felbontható elemi törtek összegére.*

FELADATOK

Oldjuk meg a következő racionális integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 - 4x}dx$

Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, bontsuk tehát elemi törtek összegére. Mivel $x^2 - 4x = x(x-4)$, ezért

$$\frac{3}{x^2 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4}$$

alakban keressük az elemi törtek összegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel. Ekkor

$$3 = A(x-4) + Bx.$$

$x = 0$ esetén a fenti egyenlőségből $3 = -4A$ adódik, $x = 4$ esetén pedig $3 = 4B$, amelyből a megoldások $A = -\frac{3}{4}$ és $B = \frac{3}{4}$, az integrandus pedig felírható mint

$$\frac{3}{x^2-4x} = \frac{-\frac{3}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{4}}{x-4} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-4},$$

az integrálási feladat pedig a következő módon oldható meg:

$$\int \frac{3}{x^2-4x}dx = \int \left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-4}\right)dx = -\frac{3}{4}\int\frac{1}{x}dx + \frac{3}{4}\int\frac{1}{x-4}dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{3}{4}\ln|x-4| + C = \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right| + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény és a nevezője felírható $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ alakban, ezért

$$\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

alakban keressük az elemi törtek összegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$3x = A(x-2) + B(x+1), \quad \text{illetve} \quad 3x = (A+B)x - 2A + B.$$

A megfelelő együtthatók kiegyenlítésével kapjuk az

$$A + B = 3, \quad -2A + B = 0$$

két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert, amelynek megoldása $A = 1$, $B = 2$. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right)dx = \int\frac{1}{x+1}dx + 2\int\frac{1}{x-2}dx =$$

$$= \ln|x+1| + 2\ln|x-2| + \ln|C| = \ln\left|C(x+1)(x-2)^2\right|.$$

3. $\displaystyle\int \frac{-x^2-x-7}{x^3+3x^2-4}dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény és a nevezője felírható $x^3+3x^2-4 = (x-1)(x+2)^2$ alakban, ezért

$$\frac{-x^2-x-7}{x^3+3x^2-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

alakban keressük az elemi törtek összegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$-x^2 - x - 7 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1).$$

$x = 1$ esetén a fenti egyenlőségből $-9 = 9A$, illetve $A = -1$ adódik, $x = -2$ esetén $-9 = -3C$, illetve $C = 3$, $x = 0$ behelyettesítésével pedig $-7 = -4 - 2B - 3$, illetve $B = 0$. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I = \int \frac{-x^2 - x - 7}{x^3 + 3x^2 - 4} dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{(x+2)^2} \right) dx = -\int \frac{1}{x-1} + 3 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx.$$

Az $x - 1 = t$, $dx = dt$, illetve $x + 2 = z$, $dx = dz$ helyettesítések bevezetésével, majd az integrálás elvégzésével kapjuk, hogy

$$I = -\int \frac{dt}{t} + 3 \int \frac{dz}{z^2} = -\ln|t| - \frac{3}{z} + C = -\ln|x-1| - \frac{3}{x+2} + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{-3x^2 + 2x - 21}{x^3 - 3x^2 + 5x - 15} dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény és a nevezője felírható $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x-3)(x^2+5)$ alakban, ezért

$$\frac{-3x^2 + 2x - 21}{(x-3)(x^2+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2+5}$$

alakban keressük az elemi törtek összegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$-3x^2 + 2x - 21 = A(x^2+5) + (Bx + C)(x-3).$$

$x = 3$ esetén a fenti egyenlőségből $-42 = 14A$, illetve $A = -3$ adódik, $x = 0$ esetén $-21 = -15 - 3C$, illetve $C = 2$, $x = 1$ behelyettesítésével pedig $-4 = -2B - 4$, illetve $B = 0$ a megoldás. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I = \int \frac{-3x^2 + 2x - 21}{x^3 - 3x^2 + 5x - 15} dx = \int \left(\frac{-3}{x-3} + \frac{2}{x^2+5} \right) dx =$$

$$= -3 \int \frac{1}{x-3} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+5} dx.$$

Emeljünk ki 5-öt a második integrál nevezőjéből, majd vezessük be az $x - 3 = t$, $dx = dt$ és $\dfrac{x}{\sqrt{5}} = s$, $dx = \sqrt{5} ds$ helyettesítéseket. Ekkor

$$I = -3 \int \frac{dt}{t} + \frac{2}{5} \int \frac{\sqrt{5} ds}{s^2+1} = -3 \ln|t| + \frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} s + C =$$

$$= -3 \ln|x-3| + \frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3-x}dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény és a nevezője felírható $x^3-x=x(x-1)(x+1)$ alakban, ezért

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

alakban keressük az elemi törtek öszegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$x-3=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

$x=0$ esetén a fenti egyenlőségből $-3=-A$, illetve $A=3$ adódik, $x=1$ esetén $-2=2B$, illetve $B=-1$, $x=-1$ behelyettesítésével pedig $-4=2C$, illetve $C=-2$ a megoldás. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I=\int \frac{x-3}{x^3-x}dx=\int\left(\frac{3}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{-2}{x+1}\right)dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=3\ln|x|-\ln|x-1|-2\ln|x+1|+\ln|C|=\ln\left|\frac{Cx^3}{x^2-1}\right|.$$

6. $\displaystyle\int \frac{-2x^3-2x+2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény, nevezője pedig irreducibilis másodfokú polinomok szorzata, ezért

$$\frac{-2x^3-2x+2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

alakban keressük az elemi törtek öszegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$-2x^3-2x+2=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1).$$

$x=0$ esetén a fenti egyenlőségből $2=B+D$ adódik, $x=1$ érték behelyettesítésével $-2=(A+B)+(C+D)\cdot 3$, $x=-1$ behelyettesítésével $6=(-A+B)\cdot 3+(-C+D)$, $x=2$ behelyettesítésével pedig az $-18=(2A+B)\cdot 3+(2C+D)\cdot 7$ egyenletet kapjuk. A kapott négy egyenletből álló négyismeretlenes egyenletrendszer

$$\begin{aligned} B+D &= 2,\\ A+B+3C+3D &= -2,\\ -3A+3B-C+D &= 6,\\ 6A+3B+14C+7D &= -18. \end{aligned}$$

Az első egyenletből $D=2-B$, s ezt behelyettesítve a többi egyenletbe adódik a következő három lineáris egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer

$$A-2B+3C=-8,\quad -3A-2B-C=4,\quad 3A-2B+7C=-16,$$

amelynek megoldása $A=0$, $B=1$ és $C=-2$, valamint $D=1$. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I=\int\frac{-2x^3-2x+2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{-2x+1}{x^2-x+1}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x^2+x+1}-\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx.$$

Az első integrál megoldásához átírjuk a nevezőt

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]$$

formába és bevezetjük a $\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}=s$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}}dx=ds$, $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}ds$ helyettesítést, a másik integrálban pedig az $x^2-x+1=t$, $(2x-1)dx=dt$ helyettesítést vezetjük be. Ekkor

$$I=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}-\int\frac{dt}{t}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{ds}{s^2+1}-\ln|t|=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}s-\ln|t|+C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\ln\left(x^2-x+1\right)+C.$$

7. $\displaystyle\int\frac{x^3+x-1}{x^4+x^3+2x^2+x+1}dx$

Megoldás. Alakítsuk át a nevezőt szorzattá:

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=x^4+x^3+x^2+x^2+x+1=$$

$$=x^2(x^2+x+1)+x^2+x+1=(x^2+x+1)(x^2+1).$$

Így az integrál megoldásához

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

alakban keressük az elemi törtek összegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$x^3+x-1=(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+1).$$

$x=0$ esetén a fenti egyenlőségből $-1=B+D$ adódik, az $x=1$ érték behelyettesítésével $1=(A+B)\cdot3+(C+D)\cdot2$, az $x=-1$ érték behelyettesítésével $-3=(-A+B)\cdot1+(-C+D)\cdot2$, az $x=2$ érték behelyettesítésével pedig az $9=(2A+B)\cdot7+(2C+D)\cdot5$ egyenletet kapjuk. A kapott négy egyenletből álló négyismeretlenes egyenletrendszer

$$\begin{aligned}B+D&=-1,\\3A+3B+2C+2D&=1,\\-A+B-2C+2D&=-3,\\14A+7B+10C+5D&=9.\end{aligned}$$

Az első egyenletből $D = -1 - B$, s ezt behelyettesítve a többi egyenletbe adódik a következő három lineáris egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer

$$3A + B + 2C = 3, \quad -A - B - 2C = -1, \quad 7A + B + 5C = 7,$$

amelynek megoldása $A = 1$, $B = 0$ és $C = 0$, valamint $D = -1$. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I = \int \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1} dx = \int \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 + x + 1} \right) dx =$$

$$= \int \frac{x dx}{x^2 + 1} - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Az első integrálban bevezetjük az $x^2 + 1 = t$, $2x dx = dt$, $x dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést, a második integrál megoldásához pedig átírjuk a nevezőt

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]$$

formába és bevezetjük a $\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}} = s$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}} dx = ds$, $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2} ds$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln |t| - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{ds}{s^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} s + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

8. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2} dx$

Megoldás. Először bontsuk elemi törtek összegére a $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ valós szabályos racionális törtet, ahol $P(x) = 2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ és $Q(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$Q(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x^2 + 1),$$

s emellett az $x + 2$, $x - 1$, $x^2 + 1$ polinomok mindegyike irreducibilis. A keresett felbontás szükségképpen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$$

alakú, ahonnan az A, B, C, D és E paraméterek értékét kell meghatározni. Szorozva a fenti egyenlőség mindkét oldalát a $Q(x)$ polinommal, következik a

$$\begin{aligned} P(x) &= A(x - 1)^2(x^2 + 1) + B(x + 2)(x^2 + 1) + C(x + 2)(x - 1)(x^2 + 1) + \\ &+ Dx(x + 2)(x - 1)^2 + E(x + 2)(x - 1)^2 \end{aligned}$$

egyenlőség. Kiegyenlítve a kapott egyenlőség jobb és bal oldalán szereplő polinomok megfelelő együtthatóit, öt egyenletből álló, egyértelműen megoldható lineáris egyenletrendszert kapunk, A, B, C, D, E ismeretlenekkel. Az ismeretlenek meghatározására azonban más módszer is választható. Ha a kapott egyenlőségben az $x = -2$ behelyettesítést elvégezzük, a $45A = 135$ egyenlőséget kapjuk, ahonnan $A = 3$ adódik. $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $6B = 6$, azaz $B = 1$. Ezután helyettesítsünk az egyenlőségbe $x = 0$-t, majd $x = -1$-et. Figyelembe véve A és B ismert értékeit, kapjuk a

$$\begin{aligned} -2C + 2E &= -2 \\ -4C - 4D + 4E &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Innen $D = 1$. Végül helyettesítsünk $x = 2$-t a fenti egyenlőségbe, majd a már kiszámolt értékek felhasználásával együtt nyerjük a $20C + 4E = -52$ egyenletet, ami a fenti egyenletrendszerrel együtt vezet a $C = -2$ és $E = -3$ értékekhez. Így tehát

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+1}.$$

A fenti levezetés alapján

$$I = \int \frac{2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2} dx =$$

$$= \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int \frac{3}{x+2} dx \int + \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{3}{x^2+1} dx.$$

Az $s = x + 2$ és $t = x - 1$ helyettesítés bevezetésével, ahol $ds = dx$ és $dt = dx$, valamint a $w = x^2 + 1$ helyettesítés bevezetésével, ahol $dw = 2xdx$, adódik

$$I = 3 \int \frac{1}{s} ds + \int \frac{1}{t^2} dt - 2 \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= 3 \ln |s| - \frac{1}{t} - 2 \ln |t| + \frac{1}{2} \ln |w| - 3\operatorname{arctg} x + C.$$

Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy

$$I = 3 \ln |x+2| - \frac{1}{x-1} - 2 \ln |x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 3\operatorname{arctg} x + C.$$

9. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x-1)(x+2)} dx$

Megoldás. Az integrandus egy nem szabályos racionális törtfüggvény, ami azt jelenti, hogy fel kell írni egy polinom és egy szabályos racionális tört összegeként. A számlálót a nevezővel elosztva, rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{x^4}{(x-1)(x+2)} = x^2 - x + 3 + \frac{-5x + 6}{(x-1)(x+2)},$$

és így

$$I = \int \frac{x^4}{(x-1)(x+2)}dx =$$

$$= \int \left(x^2 - x + 3 + \frac{-5x+6}{(x-1)(x+2)} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{-5x+6}{(x-1)(x+2)}dx.$$

A racionális törtfüggvény integrálásához a racionális törtfüggvényt fel kell bontani elemi törtek összegére. Konkrét esetben:

$$\frac{-5x+6}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

Ebből következik, hogy

$$I = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{16}{3} \frac{1}{x+2} \right) dx.$$

Az $s = x - 1$ és $t = x + 2$ helyettesítés bevezetésével, ahol $ds = dx$ és $dt = dx$, adódik, hogy

$$I = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \int \frac{1}{s} ds - \frac{16}{3} \int \frac{1}{t} dt =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \ln|s| - \frac{16}{3} \ln|t| + C.$$

Visszahelyettesítés után kapjuk a következő eredményt:

$$I = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{16}{3} \ln|x+2| + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \ln \frac{|x-1|}{(x+2)^{16}} + C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 5x - 11}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} dx$

Megoldás. Az integrandus egy nem szabályos racionális törtfüggvény, ami azt jelenti, hogy fel kell írni egy polinom és egy szabályos racionális tört összegeként. A számlálót a nevezővel elosztva, rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 5x - 11}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} = x + 2 + \frac{x^2 + 8x + 7}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9},$$

s így

$$I = \int \frac{x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 5x - 11}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} dx = \int \left(x + 2 + \frac{x^2 + 8x + 7}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} \right) dx =$$

$$= \int (x+2)\, dx + \int \frac{x^2 + 8x + 7}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{x^2 + 8x + 7}{(x-1)(x+3)^2} dx.$$

A racionális törtfüggvény integrálásához a racionális törtfüggvényt fel kell bontani elemi törtek összegére. Konkrét esetben:

$$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)(x+3)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x+3)^2}.$$

Ebből következik, hogy

$$I=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x+3)^2}.$$

Az $s=x-1$ és $t=x+3$ helyettesítés bevezetésével, ahol $ds=dx$ és $dt=dx$, adódik, hogy

$$I=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{ds}{s}+2\int\frac{dt}{(t)^2}=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|s|-\frac{2}{t}+C=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x-1|-\frac{2}{x+3}+C.$$

5.4.2. Irracionális függvények integrálása

Az irracionális integrálok megoldásakor arra törekszünk, hogy megfelelő helyettesítések bevezetésével az adott integrált racionális törtfüggvény integrálására vezessük vissza. Irracionális integrálok esetén a típusok és helyettesítések igen sokfélék lehetnek. Közülük csak a két legegyszerűbbet mutatjuk meg. A következőkben az R racionális törtkifejezést jelöl.

a) $R\left(x,\ \sqrt[p_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[p_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},...,\ \sqrt[p_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ integrál esetén a helyettesítés

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n,\quad \text{ahol}\quad n=LKT(p_1,p_2,...,p_k).$$

Ha $c=0$ és $d=1$, akkor ez az integráltipus a legegyszerűbb alakot veszi fel. Mi csak ilyen integrálokkal foglalkozunk.

FELADATOK

Határozzuk meg a következő irracionális integrálok megoldását.

1. $\int x\sqrt[3]{2x+3}dx$

Megoldás. Az integrál megoldásához vezessük be a $2x+3=t^3$, $x=\frac{t^3-3}{2}$, $2dx=3t^2dt$, $dx=\frac{3}{2}t^2dt$ helyettesítést, az adott integrál pedig így alakul:

$$\int x\sqrt[3]{2x+3}dx=\int\frac{t^3-3}{2}\cdot\sqrt[3]{t^3}\cdot\frac{3}{2}t^2dt=\frac{3}{4}\int(t^3-3)t^3dt=\frac{3}{4}\int(t^6-3t^3)dt=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{t^7}{7}-3\cdot\frac{t^4}{4}\right)+C=\frac{3}{4}t^4\left(\frac{t^3}{7}-\frac{3}{4}\right)+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x+3)^4}\left(\frac{2x+3}{7}-\frac{3}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{3}{4}(2x+3)\sqrt[3]{2x+3}\left(\frac{8x+12-21}{28}\right)+C=\frac{3}{112}(2x+3)(8x-9)\sqrt[3]{2x+3}+C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy az integrandus irracionális függvény, ahol minden gyök alatti mennyiség ugyanaz az x, és megegyezik az a) típusú integrállal $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$ esetén. Mivel a gyökkitevők 2 és 3, ezért $n=LKT(2,3)=6$, így a helyettesítés $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. Ekkor

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}}=\int \frac{6t^5dt}{\sqrt[3]{t^6}+2\sqrt{t^6}}=6\int \frac{t^5dt}{t^2+2t^3}=6\int \frac{t^3dt}{1+2t},$$

valóban racionális integrál. Mivel

$$\frac{t^3}{1+2t}=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{4}+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2t+1},$$

ezért a keresett integrál

$$I=6\int\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2t+1}\right)dt=3\int t^2dt-\frac{3}{2}\int tdt+\frac{3}{4}\int dt-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{2t+1}=$$

$$=t^3-\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}\ln|2t+1|+C.$$

Mivel $x=t^6$ volt a helyettesítés, ahonnan $t=\sqrt[6]{x}$, ezért

$$I=(\sqrt[6]{x})^3-\frac{3}{4}(\sqrt[6]{x})^2+\frac{3}{4}\sqrt[6]{x}-\frac{3}{4}\ln|2\sqrt[6]{x}+1|+C=$$

$$=\sqrt{x}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}+\frac{3}{4}\sqrt[6]{x}-\frac{3}{4}\ln|2\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$

Megoldás. Mivel $\sqrt[4]{x^3}=\sqrt[4]{x\cdot x^2}=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{x}$ és így

$$I=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}+1}dx,$$

ebből az következik, hogy $n=LKT(2,4)=4$, vagyis az $x=t^4$, $dx=4t^3dt$ helyettesítést kell bevezetni. Ekkor

$$I=\int \frac{\sqrt{t^4}\cdot 4t^3dt}{\sqrt{t^4}\cdot\sqrt[4]{t^4}+1}=4\int\frac{t^4}{t^3+1}dt=$$

$$=4\int\left(t-\frac{t}{t^3+1}\right)dt=4\int tdt-4\int\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)}dt.$$

A második integrál racionális tört, amely felbontható elemi törtek összegére, azaz

$$\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{t+1}{t^2-t+1},$$

ezért a továbbiakban

$$I = 4 \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{4}{3}\int \frac{dt}{(t^2 - t + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}} =$$

$$= 2t^2 + \frac{4}{3}\ln|t+1| - \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}.$$

Vezessük most be a $\frac{2t-1}{\sqrt{3}} = z$, $dt = \frac{\sqrt{3}dz}{2}$ helyettesítést. Ekkor

$$I = 2t^2 + \frac{4}{3}\ln|t+1| - \frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} = 2t^2 + \frac{4}{3}\ln|t+1| - \frac{8\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg} z + C.$$

Visszahelyettesítve az eredeti változóra adódik, hogy $t = \sqrt[4]{x}$, ezért

$$I = 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| - \frac{8\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-5} - \sqrt[4]{2x-5}}$

Megoldás. Mivel $n = LKT(2,4) = 4$, vagyis az $2x-5 = t^4$, $2dx = 4t^3dt$, $dx = 2t^3dt$ helyettesítést kell bevezetni. Ekkor

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-5} - \sqrt[4]{2x-5}} = \int \frac{2t^3dt}{\sqrt{t^4} - \sqrt[4]{t^4}} = 2\int \frac{t^3dt}{t^2-t} = 2\int \frac{t^2dt}{t-1} =$$

$$= 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt = 2\int \frac{(t-1)(t+1)}{t-1}dt + 2\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= 2\int (t+1)dt + 2\int \frac{dt}{t-1} = t^2 + 2t + 2\ln|t-1| + C.$$

Mivel most $t = \sqrt[4]{2x-5}$, ezért visszatérve az eredeti változóra kapjuk, hogy

$$I = \sqrt{2x-5} + 2\sqrt[4]{2x-5} + 2\ln\left|\sqrt[4]{2x-5} - 1\right| + C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

Megoldás. Vezessük be az $x+1 = t^2$, $t = \sqrt{x+1}$, $dx = 2tdt$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx = \int \frac{t+1}{t-1}\cdot 2tdt = 2\int \frac{t^2+t}{t-1}dt = 2\int \left(t + 2 + \frac{2}{t-1}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} + 2t + 2\ln|t-1|\right) + C = t^2 + 4t + 4\ln|t-1| + C.$$

Visszatérve az eredeti változóra,

$$I = x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4\ln\left|\sqrt{x+1} - 1\right| + C.$$

b) $R\left(x, \sqrt{px^2+qx+r}\right)dx$ $(p,q,r \in \mathbf{R})$ típusú irracionális integrálokat vagy trigonometrikus vagy hiperbolikus helyettesítéssel oldhatunk meg attól függően, hogy az px^2+qx+r másodfokú trinom négyzetek összegeként vagy négyzetek különbségeként írható fel. Ha $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, akkor

$$R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx \quad \text{esetén a helyettesítés} \quad x = a\sin t \quad \text{vagy} \quad x = a\cos t,$$

$$R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx \quad \text{esetén a helyettesítés} \quad x = a\,\mathrm{sh}\, t,$$

$$R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx \quad \text{esetén a helyettesítés} \quad x = a\,\mathrm{ch}\, t.$$

A megadott helyettesítéseket és a

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}, \quad \mathrm{sh}^2 t = \frac{\mathrm{ch}\, 2t-1}{2}, \quad \mathrm{ch}^2 t = \frac{\mathrm{ch}\, 2t+1}{2}$$

azonosságokat alkalmazva a kapott integrálok alapintegrálokra vezethetők vissza.

FELADATOK

Oldjuk meg a következő irracionális integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$

Megoldás. A fentiek alapján vezessük be az $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{(\sin^2 t - 1)\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \int \frac{\cos t dt}{(-\cos^2 t)\sqrt{\cos^2 t}} = -\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\mathrm{tg}\, t + C.$$

Mivel

$$t = \arcsin x \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}},$$

ezért visszatérve az eredeti változóra adódik, hogy

$$I = -tg(\arcsin x) + C = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

Megoldás. A gyök alatti másodfokú kifejezés most négyzetek összegeként írható fel $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ alakban, ezért alkalmazzuk az $x+1 = \mathrm{sh}\, t$, $dx = \mathrm{ch}\, t dt$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{\mathrm{ch}\, t dt}{\mathrm{sh}^2 t \cdot \sqrt{\mathrm{sh}^2 t+1}} =$$

$$= \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{sh}^2 t \cdot \sqrt{\operatorname{ch}^2 t}} = \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{cth} t + C = -\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}}{\operatorname{sh} t} + C.$$

Mivel $t = \operatorname{arsh}(x+1)$, ezért visszatérve az eredeti változóra azt kapjuk, hogy

$$I = -\frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{x+1} + C = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C.$$

3. $\int x\sqrt{x-x^2}dx$

Megoldás. Mivel $x - x^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - x + x^2\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, ezért

$$I = \int x\sqrt{x-x^2}dx = \int x\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int x\sqrt{1-(2x-1)^2}dx.$$

Vezessük be a $2x - 1 = \sin t$, $x = \frac{1+\sin t}{2}$, $2dx = \cos t dt$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1+\sin t}{2} \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \frac{\cos t dt}{2} = \frac{1}{8}\int (1+\sin t)\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2 t dt + \frac{1}{8}\int \cos^2 t \sin t dt.$$

Az első integrálban alkalmazzuk a $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ trigonometrikus azonosságot, a másikban pedig bevezetjük a $\cos t = z$, $-\sin t dt = dz$, $\sin t dt = -dz$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt - \frac{1}{8}\int z^2 dz = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2t)dt - \frac{1}{8}\frac{z^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{16}\int dt + \frac{1}{16}\int \cos 2t dt - \frac{1}{8}\frac{\cos^3 t}{3} = \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}\frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{24}\cos^3 t + C =$$

$$= \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}\frac{2\sin t \cos t}{2} - \frac{1}{24}(\cos t)^3 + C.$$

Térjünk most vissza az eredeti x változóra. Mivel most $\sin t = 2x - 1$, ahonnan $t = \arcsin(2x-1)$ és $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-(2x-1)^2} = \sqrt{4x-4x^2} = 2\sqrt{x-x^2}$, ezért

$$I = \frac{1}{16}\arcsin(2x-1) + \frac{1}{8}(2x-1)2\sqrt{x-x^2} - \frac{1}{24}\cdot 8(x-x^2)\sqrt{x-x^2} + C =$$

$$= \frac{1}{16}\arcsin(2x-1) + \frac{4x^2+2x-3}{12}\sqrt{x-x^2} + C.$$

5.4.3. Trigonometrikus függvények integrálása

A trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása mindig megoldható elemi úton. Néhány egyszerűbb típus trigonometrikus átalakításokkal visszavezethető olyan integrálra, amelyet helyettesítéssel megoldhatunk, míg más, összetettebb alakok $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ helyettesítéssel vezethetők vissza racionális törtfüggvény integráljára.

a) Az egyszerűbb speciális típusok közé tartoznak n és k nemnegatív egészek esetén az

$$\int \sin^{2n+1} x\cdot\cos^k x dx=\int \left(\sin^2 x\right)^n\cdot\sin x\cdot\cos^k x dx=\int \left(1-\cos^2 x\right)^n\cdot\cos^k x\cdot\sin x dx,$$

illetve

$$\int \cos^{2n+1} x\cdot\sin^k x dx=\int \left(\cos^2 x\right)^n\cdot\cos x\cdot\sin^k x dx=\int \left(1-\sin^2 x\right)^n\cdot\sin^k x\cdot\cos x dx$$

integrálok, melyeket rendre a $\cos x=t$, illetve $\sin x=t$ helyettesítéssel vezethetünk vissza polinomfüggvény integrálására, valamint az

$$\int \sin^{2n} x\cos^{2k} x dx$$

típusú integrálok, amelyek a

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\quad \text{és}\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

trigonometriai azonosságok ismételt alkalmazásával oldhatunk meg.

FELADATOK

Oldjuk meg a következő trigonometrikus integrálokat.

1. $\int \sin^5 x dx$

Megoldás. Alakítsuk át az integrandust az előzőekben bemutatott módon. Ekkor

$$I=\int \sin^5 x dx=\int \left(\sin^2 x\right)^2\sin x dx=\int \left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x dx.$$

Vezessük be a $\cos x=t$, $-\sin x dx=dt$ helyettesítést. Ekkor

$$I=\int \left(1-t^2\right)^2(-dt)=-\int \left(1-2t^2+t^4\right)dt=-t+\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C.$$

Visszatérve az eredeti változóra kapjuk, hogy

$$I=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

2. $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$

Megoldás. Végezzük el az integrandus megfelelő átalakításait. Ekkor

$$I = \int \cos^3 x \sin^4 x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^4 x \cos x dx.$$

Vezessük be a $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ helyettesítést. Az integrál most így módosul:

$$I = \int \left(1 - t^2\right) t^4 dt = \int \left(t^4 - t^6\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C.$$

Visszatérve az eredeti változóra kapjuk, hogy

$$I = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

3. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$

Megoldás. Végezzük el először a trigonometrikus átalakításokat. Ekkor

$$I = \int \cos^2 x \sin^4 x dx = \int 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{4} dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx.$$

Az első integrált bontsuk tovább két integrál összegére, a másodikban pedig vezessük be a $\sin 2x = t$, $2 \cos 2x dx = dt$, $\cos 2x dx = \frac{dt}{2}$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx - \frac{1}{8} \int t^2 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \frac{\sin 4x}{4} dx - \frac{1}{16} \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \frac{\sin 4x}{4} dx - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

b) Az $\int R(\sin x, \cos x) dx$ alakú integrálok a $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ helyettesítéssel racionalizálhatók. Ebben az esetben

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2},$$

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

FELADATOK

Oldjuk meg a következő trigonometrikus integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Megoldás. Alkalmazzuk a megadott helyettesítéseket. Ekkor

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|+C = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2\left(t^2+2t+2\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(t+1)+C = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C.$$

5.4.4. Exponenciális és hiperbolikus függvények integrálása

Az $\displaystyle\int R\left(e^x\right)dx$ exponenciális függvény integrálját, ahol az integrandus az e^x függvény racionális kifejezése, az

$$e^x=t, \quad x=\ln t, \quad dx=\frac{dt}{t}$$

helyettesítéssel tudjuk visszavezetni racionális törtfüggvény integráljára. Minthogy

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad \text{és} \quad \operatorname{cth} x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

így érthető, hogy a hiperbolikus függvények racionális kifejezéseinek integráljai ugyanezzel a helyettesítéssel racionalizálhatók.

FELADATOK

Határozzuk meg a következő exponenciális integrálok megoldását.

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Megoldás. Vezessük be az $e^x=t$, $dx=\dfrac{dt}{t}$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{t}{1+t}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|+C = \ln\left(1+e^x\right)+C.$$

2. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$

Megoldás. Vezessük be az $e^x = t$, $dx = \frac{dt}{t}$ helyettesítést. Az integrál megoldása most

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + C.$$

3. $\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx$

Megoldás. Vezessük be az $e^x = t$, $dx = \frac{dt}{t}$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt =$$

$$= \int \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = t - 2\operatorname{arctg} t + C = e^x - 2\operatorname{arctg} e^x + C.$$

4. $\int \sqrt{e^x-1}dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az $e^x = t$, $dx = \frac{dt}{t}$ helyettesítést. Ekkor az

$$I = \int \sqrt{e^x-1}dx = \int \sqrt{t-1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{\sqrt{t-1}}{t}dt.$$

integrált kapjuk, amelyben a $t-1 = z^2$, $dt = 2zdz$ helyettesítést bevezetve adódik, hogy

$$I = \int \frac{z}{z^2+1}\cdot 2zdz = 2\int \frac{z^2+1-1}{z^2+1} = \int \left(1-\frac{1}{z^2+1}\right)dz = 2\left(z-\operatorname{arctg} z\right)+C =$$

$$= 2\left(\sqrt{t-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{t-1}\right)+C = 2\left(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\right)+C.$$

5. $\int \frac{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}{e^x+1}dx$

Megoldás. Helyettesítsük be az integrandusba a $\operatorname{ch} x$ és $\operatorname{sh} x$ függvények exponenciális alakját. Ekkor a következő integrált kapjuk:

$$I = \int \frac{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}{e^x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{e^x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx.$$

Az exponenciális függvényekkel kapcsolatos integrálok első feladata alapján a megoldás

$$I = \ln\left(1+e^x\right) + C.$$

5.5. A határozott integrál fogalma és tulajdonságai

5.5.1. Arkhimédész módszere síkidomok területének meghatározására

A gyakorlati életben sokszor van szükségünk különböző síkidomok nagyságának meghatározására. Egy mérőszámot kell hozzárendelni a síkidomhoz, amit a területének nevezünk. Sokszögek esetében nincsenek nagyobb problémák, sőt a kör esetében is megoldható a hozzárendelés. Most néhány további speciális síkidomhoz fogunk területet rendelni, s feltesszük, hogy a tekintett síkidomoknak van területe.

Tekintsük azt a síkidomot, amelyet az x tengely $[0,1]$ intervalluma, az $x=1$ egyenes megfelelő szakasza és az $f(x)=x^2$ függvény grafikonjának megfelelő íve határol. Ezt a síkidomot parabolikus háromszögnek is szokás nevezni, s területének kiszámítására Arkhimédész parabola-kvadratúráját alkalmazzuk. A módszer lényege az, hogy a keresett területet téglalapok területeinek összegével közelítjük.

Írjunk a parabolikus háromszögbe és köré sokszöget a következő módon: osszuk a $[0,1]$ intervallumot n egyenlő részre ($n \in \mathbf{N}$). A

$$\left[0,\frac{1}{n}\right], \quad \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right], \quad \cdots \quad \left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right], \quad \cdots \quad \left[\frac{n-1}{n},1\right]$$

részintervallumokra állítsunk beírt és körülírt téglalapokat úgy, hogy a beírt téglalap magassága a részintervallumok kezdőpontjainak függvényértéke, azaz rendre

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

a körülírt téglalapok magassága a részintervallumok végpontjainak függvényértéke, azaz rendre

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{i}{n}\right)^2,\ \cdots,\ 1$$

legyen. A beírt téglalapok területe:

$$s_n = 0\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(i-1)^2+\cdots+(n-1)^2\right] = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

A körülírt téglalapok területe:

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+i^2+\cdots+n^2\right] = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6n^3}.$$

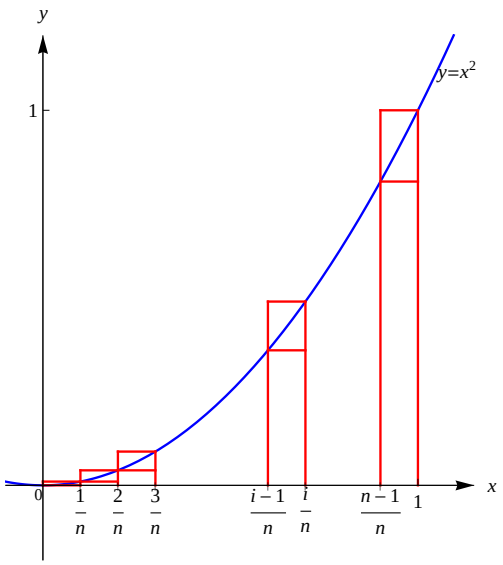
Az a sejtésünk, hogy ha egyetlen olyan szám van, amely minden s_n-nél nagyobb és minden S_n-nél kisebb, akkor a parabolikus háromszögnek van területe, és ez a T terület azzal a számmal egyenlő. Ezért felírhatjuk, hogy

$$s_n \le T \le S_n,$$

behelyettesítve a képleteket pedig kapjuk, hogy

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \le T \le \frac{(n+1)n(2n+1)}{6n^3}.$$

A fenti egyenlőtlenségek a határértékekre is érvényesek, ha $n \to \infty$, azaz igazak a



$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \le T \le \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n(2n+1)}{6n^3}$$

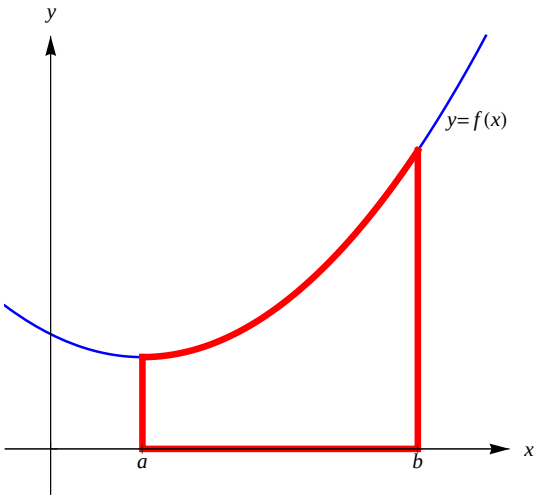
egyenlőtlenségek is. Ekkor

$$\frac{1}{3} \le T \le \frac{1}{3}, \quad \text{ahonnan} \quad T = \frac{1}{3}.$$

5.5.2. A határozott integrál fogalma

Legyen f egy korlátos pozitív függvény az $[a,b]$ intervallumon, ami azt jelenti, hogy a grafikonja az x-tengely felett helyezkedik el. Ekkor azt a síkbeli alakzatot, amelyet az x-tengelyen az $[a,b]$ intervallum, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, valamint az f függvény $[a,b]$ intervallumhoz tartozó grafikonja határol, az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó $\mathcal{G}$ **görbevonalú trapéznak** nevezzük.

A $\mathcal{G}$ görbevonalú trapézterület meghatározásának problémája és az Arkhimédészi módszer ötlete vezetett a határozott integrál definíciójához.



Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n számú

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n],$$

részintervallumra úgy, hogy az osztópontokra

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ \ldots\ < x_{n-1} < x_n = b$$

legyen érvényes. Az $[a,b]$ intervallum $\mathcal{F}$ felosztása az

$$\mathcal{F} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

ponthalmazt jelenti. Jelölje most $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ az első, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ a második, és így tovább, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ pedig az n-edik részintervallum hosszúságát. A

$$d(\mathcal{F}) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$$

számot az $\mathcal{F}$ felosztás diaméterének nevezzük, s a legnagyobb részintervallum-hosszúságot jelöli.

5.7. Definíció. *Legyen f az $[a,b]$ zárt intervallum felett definiált korlátos függvény és $\mathcal{F}$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása. Ekkor az*

$$s_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

összeget, ahol m_i jelenti az f függvény alsó határát az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumon, az f függvény $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összegének nevezzük. Az

$$S_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

összeget, ahol M_i jelenti az f függvény felső határát az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumon, az f függvény $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó felső közelítő összegének nevezzük.

5.8. Definíció. *Legyen f az $[a,b]$ zárt intervallum felett definiált korlátos függvény, $\mathcal{F}$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása és $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, a részintervallumok tetszőleges pontjainak egy kiválasztása. Ekkor a*

$$T(f, \mathcal{F}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

összeget az f függvény $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó Riemann-féle integrálösszegének nevezzük.

5.9. Tétel. *Legyen f az $[a,b]$ zárt intervallum felett definiált korlátos függvény, $\mathcal{F}$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása és $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, a részintervallumok tetszőleges pontjainak egy kiválasztása. Ekkor*

$$s_n \le T(f, \mathcal{F}, \xi) \le S_n$$

érvényes minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ha s_n és S_n az f függvény alsó és felső közelítő összegeinek sorozatai.

Bizonyítás. Az alsó és felső határ definíciójából adódik, hogy minden ξ pontválasztás esetén

$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Beszorozva a fenti értékeket a megfelelő részintervallumok hosszúságával kapjuk, hogy

$$m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Adjuk össze a fenti értékeket 1-től n-ig. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

illetve

$$s_n \leq T(f, \mathcal{F}, \xi) \leq S_n,$$

amit igazolni akartunk. $\diamond$

5.9. Definíció. *Legyen $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ korlátos függvény. Ha az $[a,b]$ intervallum minden $\mathcal{F}$ felosztására és bármely olyan $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ pont n-esre, amelyekre $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, létezik az*

$$I := \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

egyértelmű határérték, akkor az f függvényre azt mondjuk, hogy integrálható az $[a,b]$ intervallumon, az I szám az f függvény határozott integrálja az $[a,b]$ intervallumon, jelölése pedig

$$\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Az a, illetve b számok, $a < b$, a határozott integrál alsó, illetve felső határai, az f függvény a határozott integrál integrandusa. Ebben az esetben az I határérték azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden tetszőleges $\mathcal{F}$ felosztásra $d(\mathcal{F}) < \delta$ és a $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ pont n-esek bármely választása esetén igaz, hogy

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon \ .$$

Történeti okokból, és azért mert más integrálfogalom is létezik, a fenti definíció értelmében integrálható függvényeket szokás Riemann szerint integrálható függvényeknek nevezni. (Bernhard Riemann német matematikus 1826-1866.)

5.10. Tétel. *Ha az f függvény integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor f korlátos $[a,b]$ intervallumon.*

5.11. Tétel. *Az $[a,b]$ intervallumon értelmezett f függvény akkor és csakis akkor integrálható, ha az $[a,b]$ intervallum bármely $\mathcal{F}$ felosztásához a megfelelő alsó és felső közelítő összegek s_n és S_n sorozatai közös határértékhez tartanak, azaz*

$$\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} s_n = \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} S_n.$$

5.12. Tétel. *Ha az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor f integrálható az $[a,b]$ intervallumon.*

5.13. Tétel. *Ha az f függvény korlátos és monoton az $[a,b]$ intervallumon, akkor f integrálható az $[a,b]$ intervallumon.*

5.5.3. A határozott integrál tulajdonságai

5.10. Definíció. *Legyen f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon.*

1. *Ha $a > b$, akkor* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
2. *Ha $a = b$, akkor* $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Belátható, hogy minden f az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény integrálható is az $[a,b]$-n. Ugyanúgy minden olyan korlátos $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ függvény is integrálható, amely folytonos az $[a,b]$ intervallumon, kivéve véges sok pontjában.

5.14. Tétel. *Ha f a konstans függvény, azaz $f(x) = k$, $x \in [a,b]$, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx = k(b-a).$$

5.15. Tétel. *Ha f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon és k egy valós szám, akkor a kf függvény is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és* $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Bizonyítás. Minden F felosztás és a részintervallumokon választott bármely ξ pontok esetén

$$T(kf,\mathcal{F},\xi) = \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = kT(f,\mathcal{F},\xi).$$

Mivel

$$\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(f,\mathcal{F},\xi) = \int_a^b f(x)dx,$$

ezért

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(kf,\mathcal{F},\xi) = k\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(f,\mathcal{F},\xi) = k\int_a^b f(x)dx.$$

◇

5.16. Tétel. *Ha f és g integrálható függvények az $[a,b]$ intervallumon, akkor az összegük is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és* $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Bizonyítás. Minden F felosztás és a részintervallumokon választott bármely ξ pontok esetén

$$T(f+g,\mathcal{F},\xi) = \sum_{i=1}^n \left(f(\xi_i)+g(\xi_i)\right)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = T(f,\mathcal{F},\xi) + T(g,\mathcal{F},\xi).$$

Mivel

$$\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} \left(T(f,\mathcal{F},\xi) + T(g,\mathcal{F},\xi)\right) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

ezért

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(f+g,\mathcal{F},\xi) =$$

$$= \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} (T(f,\mathcal{F},\xi)+T(g,\mathcal{F},\xi)) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

◇

5.2. Következmény. *Ha f és g integrálható függvények az $[a,b]$ intervallumon, k_1 és k_2 pedig valós számok, akkor a $k_1 f + k_2 g$ függvény is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és*

$$\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x))dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx.$$

5.17. Tétel. *Ha f és g integrálható függvények az $[a,b]$ intervallumon és $f(x) \le g(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{F}$ felosztás és a részintervallumokon választott bármely ξ pontok esetén

$$T(f,\mathcal{F},\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = T(g,\mathcal{F},\xi).$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(f,\mathcal{F},\xi) \le \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(g,\mathcal{F},\xi) = \int_a^b g(x)dx.$$

◇

A következő állítások az 5.17. Tétel következményei.

5.3. Következmény. *Ha f és g integrálható függvények az $[a,b]$ intervallumon, $f(x) \le 0$ és $g(x) \ge 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx \le 0 \quad \text{és} \quad \int_a^b g(x)dx \ge 0.$$

5.18. Tétel. *Legyen f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon és legyen minden $x \in [a,b]$ esetén $m \le f(x) \le M$. Ekkor*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

5.19. Tétel (Az integrálszámítás középértéktétele)**.** *Legyen f az $[a,b]$ intervallum felett folytonos függvény. Ekkor van olyan $c \in (a,b)$ szám, hogy*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás. Mivel az f függvény folytonos, ezért a zárt $[a,b]$ intervallumon felveszi M maximumát és m minimumát. Így az f függvény teljesíti az 5.18. Tétel feltételeit, ahonnan $b-a>0$ figyelembe vételével,

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M,$$

ebből pedig az adódik, hogy $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ a $[m,M]$ intervallum egy közbenső értéke, melyet az f függvény a folytonosság miatt felvesz. Ezért van olyan $c\in(a,b)$ szám, hogy

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

s ezzel az állítás bizonyított. $\diamond$

A következő tételekben a határozott integrálok fontos tulajdonságait fogalmaztuk meg.

5.20. Tétel. *Ha f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon, akkor*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

5.21. Tétel. *Ha f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon és ha $c\in(a,b)$, akkor igaz, hogy*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

5.5.4. Newton-Leibniz formula

5.22. Tétel. *Ha f az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény és*

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

akkor a Φ függvény az f függvény egy primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon.

Bizonyítás. A Φ függvény növekményének és az x változó Δx növekményének hányadosa

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right).$$

A 5.21. Tétel alapján igaz, hogy

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Az f függvény folytonos, ha $t\in[x,x+\Delta x]$, ezért érvényes az integrálszámítás középértéktétele (5.19. Tétel), ahol $a=x$, $b=x+\Delta x$. Ekkor

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(c),\quad c\in[x,x+\Delta x].$$

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $x + \Delta x \to x$ és $c \to x$, s az f függvény folytonosságából $f(c) \to f(x)$. Tehát a fenti növekmények hányadosának határértéke létezik, ha $\Delta x \to 0$, és

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Eszerint a Φ függvény differenciálható és $\Phi'(x) = f(x)$. $\diamond$

Az integrálszámítás alaptétele lehetővé teszi az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál kiszámítását az f függvény tetszőleges F primitív függvényének segítségével.

5.23. Tétel. *Legyen f az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény, F pedig az egyik primitív függvénye, azaz $F'(x) = f(x)$, minden $x \in [a, b]$ esetén. Ekkor érvényes a Newton-Leibniz-féle formula:*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Ha F és Φ az f függvény primitív függvényei, akkor ezek a függvények legfeljebb egy állandóban különböznek egymástól. Ekkor

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

azaz

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C.$$

Az $x = a$ helyettesítési érték vezet a

$$0 = F(a) + C$$

formulához, amiből $C = -F(a)$ és

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Az $x = b$ helyettesítés után következik, hogy

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$\diamond$

A határozott integrál számításánál felhasználjuk a határozatlan integrált, s ezért a helyettesítést vagy a parciális integrálás szabályát alkalmazhatjuk a határozott integrálra is az alábbi módon.

5.24. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ folytonos függvény, $\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$ pedig olyan monoton függvény, amelynek az első deriváltja folytonos az $[\alpha, \beta]$ intervallumon. Ekkor az $x = \varphi(t)$ helyettesítés után*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \ ,$$

ahol $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

5.25. Tétel. *Ha az u és v függvények folytonosan differenciálhatók az $[a,b]$ intervallumon, akkor igaz a parciális integrálás képlete, miszerint*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \ .$$

FELADATOK.

Számítsuk ki a következő határozott integrálok értékét.

1. $\int_1^3 \left(4x^3 - x\right) dx$

Megoldás.

$$\int_1^3 \left(4x^3 - x\right) dx = \left(x^4 - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3 = \left(3^4 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(1^4 - \frac{1^2}{2}\right) = 81 - \frac{9}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 76.$$

2. $\int_2^3 \sqrt[3]{x}dx$

Megoldás.

$$\int_2^3 \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_2^3 = \frac{3}{4}\left(3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}\right).$$

3. $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x^4}$

Megoldás.

$$\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\Big|_{-4}^{-2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{-8} - \frac{1}{-64}\right) = \frac{7}{192}.$$

4. $\int_5^{12} \frac{3}{x}dx$

Megoldás.

$$\int_5^{12} \frac{3}{x}dx = 3\ln|x|\Big|_5^{12} = 3\left(\ln 12 - \ln 5\right) = 3\ln\frac{12}{5}.$$

5. $\int_0^{\pi} \sin x dx$

Megoldás.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

6. $\int_0^1 (5x+1)^4 dx$

Megoldás. Ha alkalmazzuk az $5x+1=t$, $dx=\dfrac{dt}{5}$ helyettesítést, akkor a t változóval kapott integrál határait is meg kell változtatni a régi határok értékeinek behelyettesítésével, így az új határok most $5\cdot 0+1=1$ és $5\cdot 1+1=6$ lesznek. Ekkor

$$\int_0^1 (5x+1)^4 dx = \int_1^6 t^4\cdot\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^5}{5}\Big|_1^6 = \frac{1}{25}\left(6^5-1^5\right) = 311.$$

7. $\int_1^2 e^{2x+3} dx$

Megoldás. Vezessük be a $2x+3=t$, $dx=\dfrac{dt}{2}$ helyettesítést. A megfelelő határok most $x=1$ helyett $t=5$, valamint $x=2$ helyett $t=7$. Az integrál megoldása tehát

$$\int_1^2 e^{2x+3} dx = \int_5^7 e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t\Big|_5^7 = \frac{1}{2}\left(e^7-e^5\right) = \frac{1}{2}e^5\left(e^2-1\right).$$

8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\cos x dx$

Megoldás. Vezessük be a $\cos x=t$, $\sin x dx=-dt$ helyettesítést. Az új határok most $x=\dfrac{\pi}{2}$ helyett $t=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, $x=\pi$ helyett pedig $t=\cos\pi=-1$. Az integrál ekkor

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\cos x dx = -\int_0^{-1} t dt = \int_{-1}^0 = \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^0 = 0-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

9. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$

Megoldás. Mivel $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, ezért vezessük be az integrálban a $\cos x=t$, $\sin x dx=-dt$ helyettesítést. Az új határok: $x=-\dfrac{\pi}{4}$ helyett $t=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, valamint $x=\dfrac{\pi}{4}$ helyett $t=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ekkor

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = 0.$$

10. $\int_e^{e^2} \dfrac{dx}{x\ln x}$

Megoldás. Alkalmazzuk az $\ln x=t$, $\frac{dx}{x}=dt$ helyettesítést. Az új határok $x=e$ helyett $t=\ln e=1$, illetve $x=e^2$ helyett $t=\ln e^2=2$. Ekkor

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^2 = \ln 2-\ln 1 = \ln 2.$$

11. $\int_1^2 xe^x dx$

Megoldás. Ha $u = x$, $dv = e^x dx$, valamint $du = dx$ és $v = e^x$, akkor

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = \left(2e^2 - 1e\right) - e^x\big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$$

12. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx$

Megoldás. Legyen a parciális integrálás képletében $u = \arcsin x$ és $dv = dx$. Ekkor $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ és $v = x$. Ekkor

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx = x \arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A kapott integrálban vezessük be az $1 - x^2 = t$, $xdx = -\dfrac{dt}{t}$ helyettesítést. Az új határok most $x = -\dfrac{1}{2}$ helyett $t = \dfrac{3}{4}$, illetve $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ helyett $t = \dfrac{1}{4}$. Az integrálást folytatva kapjuk, hogy

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{t}\Big|_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{12} + \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right).$$

13. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx$

Megoldás. Legyen a parciális integrálás képletében $u = x$ és $dv = \cos x dx$, ahonnan $du = dx$ és $v = \sin x$. Ekkor

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx = x \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

14. $\int_e^{e^2} x^2 \ln x dx$

Megoldás. legyen a parciális integrálás képletében $u = \ln x$ és $dv = x^2 dx$. Ekkor $du = \dfrac{dx}{x}$ és $v = \dfrac{x^3}{3}$. Ekkor

$$\int_e^{e^2} x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^6}{3} \ln e^2 - \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{3} \int_e^{e^2} x^2 dx =$$

$$= \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_e^{e^2} = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}\left(e^6 - e^3\right) =$$

$$= \frac{5}{9}e^6 - \frac{2}{9}e^3 = \frac{e^3}{9}\left(5e^3 - 2\right).$$

15. $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, s felírható

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

alakban. Ekkor

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int_0^1 \frac{dx}{x-3} - \int_0^1 \frac{dx}{x-2}.$$

Alkalmazva az $x - 3 = t$, $dx = dt$, valamint $x - 2 = z$, $dx = dz$ helyettesítéseket adódik, hogy az új határokkal

$$I = \int_{-3}^{-2} \frac{dt}{t} - \int_{-2}^{-1} \frac{dz}{z} = \ln|t| \Big|_{-3}^{-2} - \ln|z| \Big|_{-2}^{-1} = \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2 = \ln \frac{4}{3}.$$

5.6. A határozott integrál alkalmazása

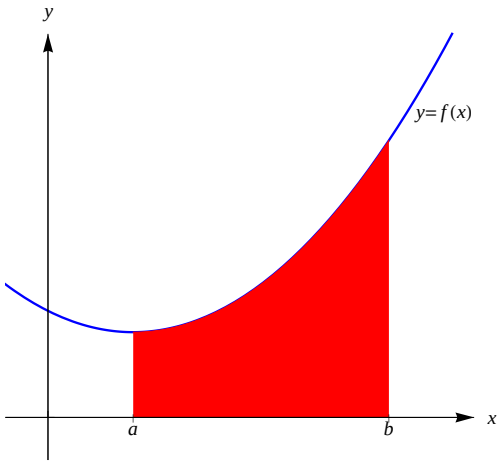
5.6.1. Síkidomok területszámítása

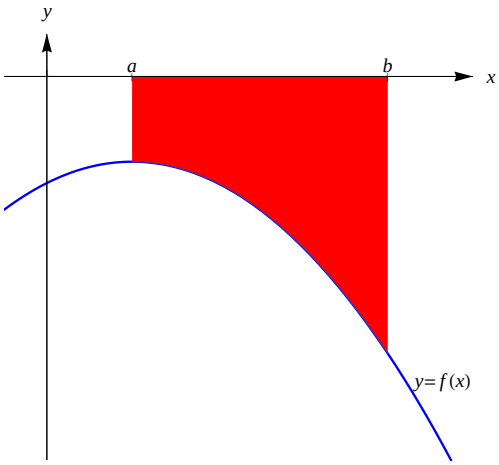
Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ nemnegatív folytonos függvény, az $[a, b]$ intervallumon. A Riemann-féle integrál definíciója alapján kimondhatjuk, hogy az f függvényhez tartozó $\mathcal{G}$ görbevonalú trapéz $T(\mathcal{G})$ területe az $[a, b]$ intervallum felett:

$$T(\mathcal{G}) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ha az $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ folytonos függvény nempozitív az $[a, b]$ intervallumon, akkor az f függvényhez tartozó $\mathcal{G}$ görbevonalú trapéz $T(\mathcal{G})$ területe az $[a, b]$ intervallum felett:

$$T(\mathcal{G}) = -\int_a^b f(x)dx, \quad \text{illetve} \quad T(\mathcal{G}) = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

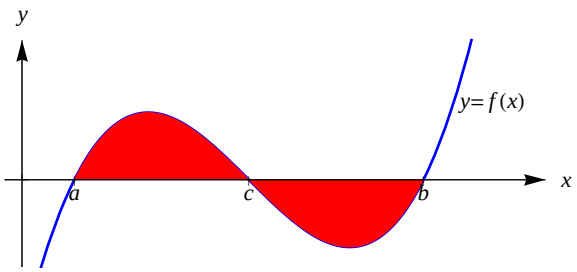




Ha az $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon előjelet vált, azaz az $[a, c]$ intervallumon nemnegatív, a $[c, b]$ intervallumon pedig nempozitív $(a < c < b)$, akkor a $\mathcal{G}$ degenerált görbevonalú trapéz területét kell kiszámolni.

Ebben az esetben a terület kiszámítását egy x-tengely feletti és egy x-tengely alatti terület kiszámítására kell szétbontani, azaz

$$T(\mathcal{G}) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

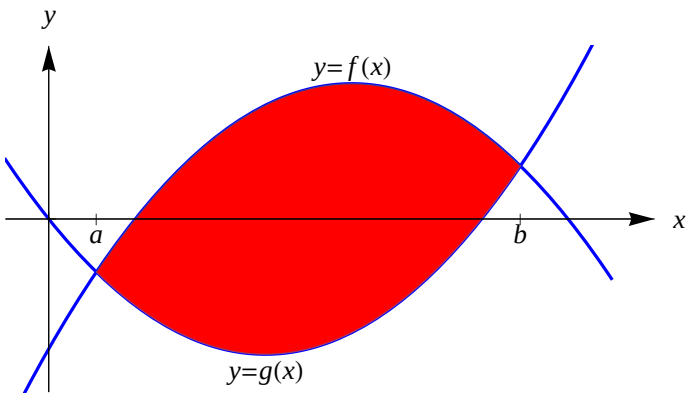


Legyenek $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ és $g : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ olyan folytonos függvények az $[a, b]$ intervallumon, hogy $g(x) \leq f(x)$, $x \in [a, b]$. Az

$$\mathcal{A} = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

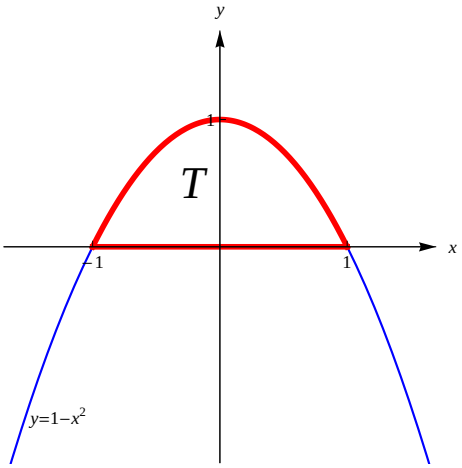
zárt alakzat területét most a következő módon számoljuk ki:

$$T(\mathcal{A}) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



FELADATOK.

1. Számítsuk ki az $y = 1 - x^2$ görbe és az x tengely által határolt zárt tartomány területét.



Megoldás. Keressük meg az $y = 1 - x^2$ parabola és az x-tengely metszéspontjait, vagyis a parabola nullahelyeit. $1 - x^2 = 0$, ha $x = -1$ vagy $x = 1$, ezért a keresett terület az x-tengelyen -1-től 1-ig terjed és a következőképpen számíthatjuk ki:

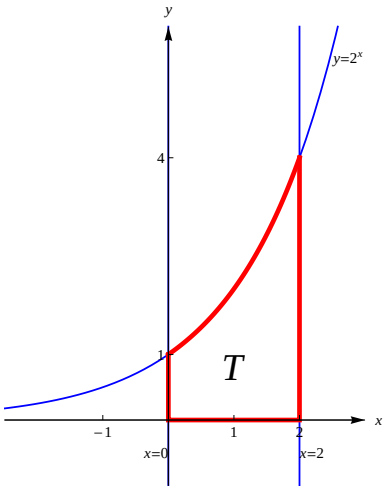
$$T = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

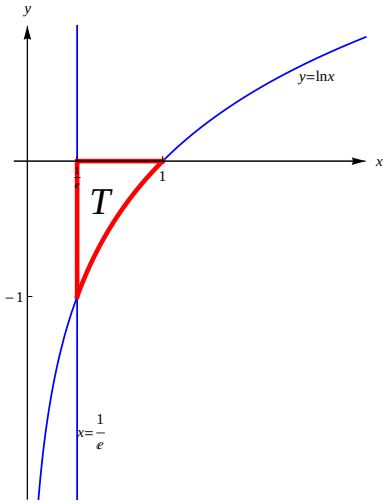
$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

2. Számítsuk ki az $y = 2^x$ görbe, valamint az $x = 0$, $x = 2$ és $y = 0$ egyenesek által határolt zárt terület nagyságát.

Megoldás. A határozott integrál határait az $x = 0$ és $x = 2$ egyenesek adják meg. A keresett terület

$$T = \int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2}.$$





3. Számítsuk ki az $y = \ln x$ görbe, valamint az $x = \dfrac{1}{e}$ és $y = 0$ egyenesek által határolt zárt terület nagyságát.

Megoldás. Mivel az $y = \ln x$ görbe az $x = 1$-ben metszi az x-tengelyt, így az integrálás határai az $x = \dfrac{1}{e}$ és $x = 1$ lesznek. A keresett terület az x-tengely alatt

helyezkedik el, ezért

$$T = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx = \int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_{1}^{\frac{1}{e}} =$$

$$= \left(\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (1\ln 1 - 1) = \frac{1}{e}\cdot(-1) - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

4. Számítsuk ki az $y = \sin x$ görbe és az x tengely által határolt zárt tartomány területét a $[0, 2\pi]$ intervallumon.

Megoldás. Állapítsuk meg, hogy a megadott intervallumon $\sin x > 0$, ha $x \in (0, \pi)$, és $\sin x < 0$, ha $x \in (\pi, 2\pi)$.Ezért a keresett terület nagyságát két integrál segítségével számítjuk:

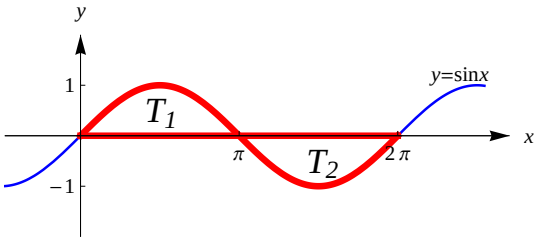
$$T = T_1 + T_2 = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) = -(-1-1) + (1+1) = 2 + 2 = 4.$$

Vegyük észre, hogy ha nem vesszük figyelembe a függvény előjelét és a keresett területet csak egy integrál segítségével számítjuk 0-tól 2π-ig, akkor a

$$T^* = \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} =$$

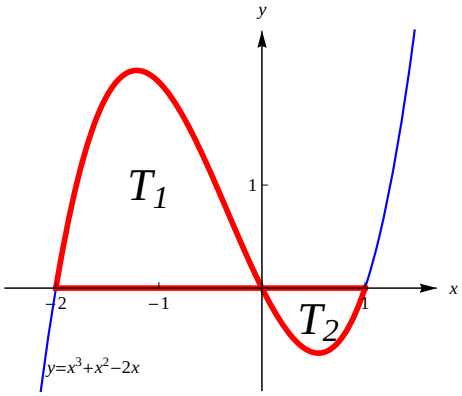
$$= -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0$$



számot kapnánk, ami természetesen helytelen lenne, mert csak arra utalna, hogy az x-tengely alatti és feletti tartományok területe egymással egyenlő.

5. Számítsuk ki az $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt zárt tartomány területét.

Megoldás. Vizsgáljuk ki az f függvény területszámítási szempontból fontos tulajdonságait. Mivel $f(x) = x(x-1)(x+2)$, így a nullahelyek $x = -2$, $x = 0$ és $x = 1$, a függvény negatív, ha $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$, valamint a függvény pozitív, ha $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$. Ezért a keresett területet ismét két határozott integrál segítségével számítjuk ki.



$$T = T_1 + T_2 = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{0}^{1} =$$

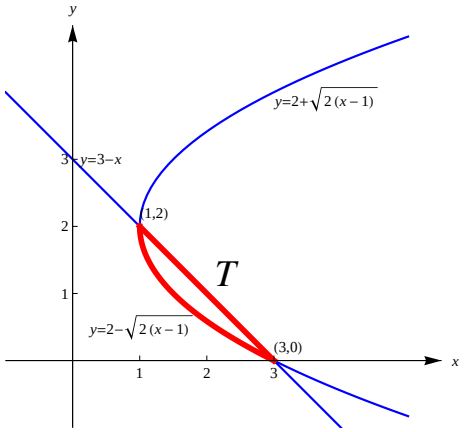
$$= \left[0 - \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - 0\right] = \frac{37}{12} = 3\frac{1}{12}.$$

Vegyük észre ennél a feladatnál is, hogy a keresett területet most sem számíthatjuk egy integrállal, mert bár ebben az esetben pozitív számot kapunk, hiszen a

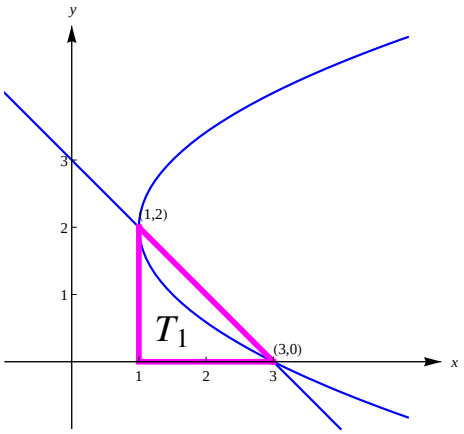
$$T^* = \int_{-2}^{1}(x^3 + x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 4 = \frac{27}{12}$$

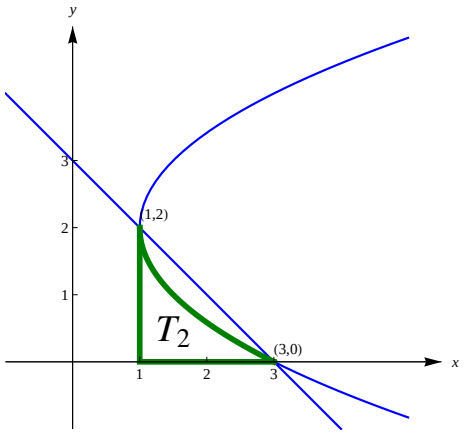
számot kapnánk, de ez nem a keresett terület nagyságának mérőszáma.

6. Határozzuk meg az $(y-2)^2 = 2(x-1)$ parabola és az $y = 3 - x$ egyenes által határolt zárt terület nagyságát.



I.Megoldás. Az egyenes és a parabola metszéspontjai az $(1,2)$ és $(3,0)$ pontok. A keresett területet megkapjuk, ha az $[1,3]$ intervallumon az $y = 3 - x$ egyenes alatti T_1 területből kivonjuk a parabola alatti T_2 területet. Fejezzük ki y-t az adott parabola egyenletéből. Ekkor a parabola alsó ágának egyenlete $y = 2 - \sqrt{2(x-1)}$. Így





$$T_1 = \int_1^3 (3-x)dx = 3x|_1^3 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = 9 - 3 - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2 \quad \text{és}$$

$$T_2 = \int_1^3 \left(2 - \sqrt{2(x-1)}\right)dx = 2x|_1^3 - \sqrt{2}\int_1^3 \sqrt{x-1}dx.$$

Vezessük be a kapott integrálban a $t = x - 1$, $dt = dx$ helyettesítést. Ekkor

$$T_2 = (6-2) - \sqrt{2}\int_0^2 t^{\frac{1}{2}}dt = 4 - \sqrt{2}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3},$$

a keresett terület nagysága pedig $T = T_1 - T_2 = \frac{2}{3}$.

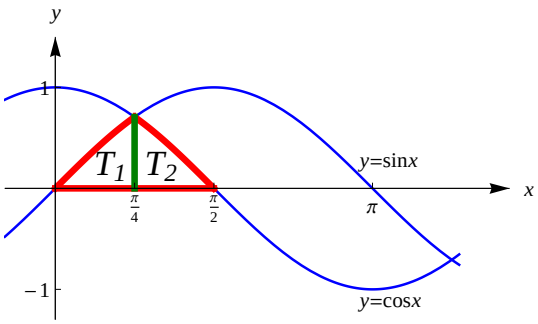
II.Megoldás. Megmutatjuk, hogy ezt a területet egyszerűbben úgy is számíthatjuk, hogy az adott görbe $x = x(y)$ alakját és a metszéspontok ordinátáit használjuk fel, s az adott görbék és az y-tengely közötti területek segítségével jutunk eredményhez. A metszéspontok ordinátái az előző számítások alapján $y = 0$ és $y = 2$. Az $y = 3-x$ egyenest $x = 3-y$ módon fejezzük ki, az $(y-2)^2 = 2(x-1)$ parabolát pedig mint $x = 1 + \frac{1}{2}(y-2)^2$. A keresett területet most a következőképpen számoljuk:

$$T = \int_0^2 \left[(3-y) - \left(1 + \frac{1}{2}(y-2)^2\right)\right] dy = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 = -\frac{1}{6}(8-0) + \frac{1}{2}(4-0) = \frac{2}{3}.$$

7. Számoljuk ki az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ görbék, valamint az $y = 0$ egyenes $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ szakasza által határolt zárt terület mérőszámát.

Megoldás. Az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ görbéknek a megadott intervallumon belül $x = \frac{\pi}{2}$-ben van metszéspontjuk, ezért a keresett terület egyrészt a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon az $y = \sin x$ görbe alatti területből, másrészt a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon az $y = \cos x$ görbe alatti területből tevődik össze. Így



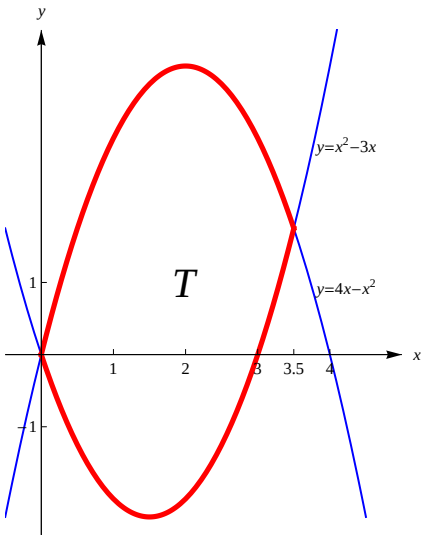
$$T = T_1 + T_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) + \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

8. Számítsuk ki az $y = 4x - x^2$ és $y = x^2 - 3x$ parabolák által határolt zárt terület a nagyságát.
Megoldás. A keresett területet a

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

képlettel számoljuk, ahol $f(x) = 4x - x^2$ és $g(x) = x^2 - 3x$, a és b pedig a megfelelő görbék metszéspontjainak abszcisszái. A parabolák metszéspontjaiban megegyeznek a függvényértékek, azaz $4x - x^2 = x^2 - 3x$, ahonnan a $2x^2 - 7x = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek

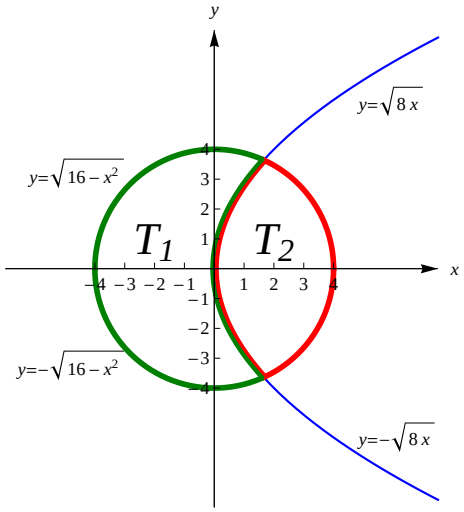


megoldása $x = 0$ vagy $x = \frac{7}{2}$. Ezért a keresett terület

$$T = \int_0^{\frac{7}{2}} \left(4x - x^2 - (x^2 - 3x)\right) dx = \int_0^{\frac{7}{2}} \left(7x - 2x^2\right) dx = \left(\frac{7x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{49}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{343}{8} - 0 = \frac{343}{24}.$$

9. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 = 16$ kör és $y^2 = 6x$ parabola által határolt zárt síkidomok területének nagyságát.



Megoldás. Az $x^2 + y^2 = 16$ középponti kör, melynek sugara $r = 4$. Az $y^2 = 6x$ parabola az $f_1(x) = \sqrt{6x}$ és $f_2(x) = -\sqrt{6x}$ függvények grafikonjaiból tevődik össze. A kör és a parabola metszéspontjainak abszcisszáját az $x^2 + 6x - 16 = 0$ egyenlet $x = 2$ pozitív megoldása adja. A grafikon jobboldali kisebb T_2 területe két részből számítható ki, a parabola alatti és a körvonal alatti terület összegéből. Eszerint

$$T_2 = \int_0^2 \left(\sqrt{6x} - (-\sqrt{6x})\right) dx + \int_2^4 \left(\sqrt{16 - x^2} - (-\sqrt{16 - x^2})\right) dx =$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{6x}dx + 2\int_2^4 \sqrt{16 - x^2}dx.$$

Vegyük észre, hogy a keresett terület szimmetrikus az x-tengelyre és emiatt a T_2 területet kiszámíthatjuk az x-tengely feletti rész kétszereseként is. Vezessük be a második integrálban az $x = 4\sin t$, $dx = 4\cos t dt$ helyettesítést. Ekkor

$$T_2 = \frac{4\sqrt{6}}{3} x\sqrt{x}\Big|_0^2 + 32\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{4\sqrt{6}}{3}(2\sqrt{2} - 0) + 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} + 16t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + 8\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} + 16\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 8\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

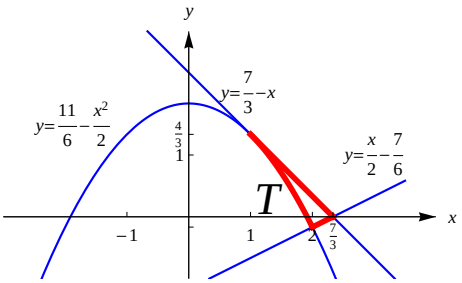
$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{4}{3}(\sqrt{3} + 4\pi).$$

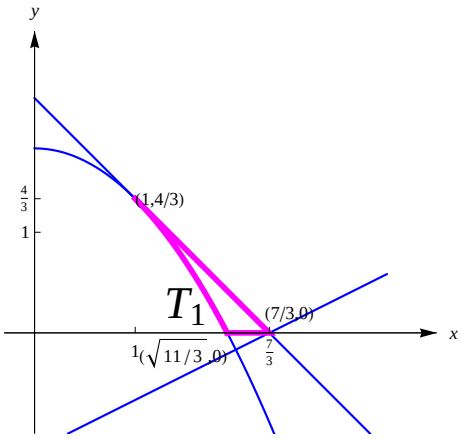
A baloldali T_1 terület nagyságát úgy számíthatjuk ki legegyszerűbben, ha a kör területéből kivonjuk a T_2 területet és ez

$$T_1 = T_{\text{kör}} - T_2 = 16\pi - \frac{4}{3}\left(\sqrt{3} + 4\pi\right) = \frac{4}{3}\left(8\pi - \sqrt{3}\right).$$

10. Határozzuk meg az $y = \frac{11}{6} - \frac{x^2}{2}$ parabola, a parabola $x = 1$ pontban húzott érintője és a parabola $x = 2$ pontban húzott merőleges egyenese által határolt zárt terület nagyságát.

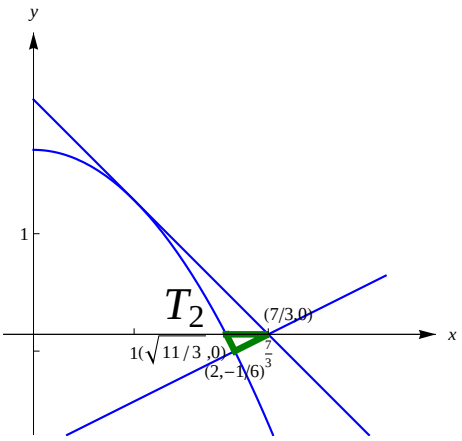
I.Megoldás. A parabola érintőjének és merőleges egyenesének meghatározásához szükség van az $f(x) = \frac{11}{6} - \frac{x^2}{2}$ függvény $f'(x) = -x$ deriváltjára. Az adott parabola $x = 1$ pontban húzott érintőjének egyenlete $y = -x + \frac{7}{3}$, az $x = 2$ pontban húzott merőlegesének egyenlete pedig $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{6}$. Az $y = -x + \frac{7}{3}$ érintőegyenes és az $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{6}$ merőleges egyenes $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ pontban metszik egymást.

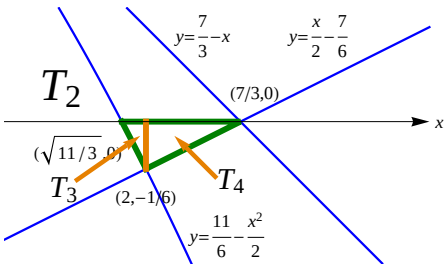




A keresett területet felbontjuk a T_1 területre, amely az x-tengely felett helyezkedik el, valamint a T_2 területre, amely az x-tengely alatt helyezkedik el. Ekkor

$$T_1 = \int_1^{\frac{7}{3}} \left(-x + \frac{7}{3}\right) dx - \int_1^{\sqrt{\frac{11}{3}}} \left(\frac{11}{6} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(\frac{8}{9} + \frac{1}{27}\left(45 - 11\sqrt{33}\right)\right).$$





A T_2 területet is két részre bontva számoljuk ki, az egyik a parabola feletti terület a $\left[\sqrt{\frac{11}{3}}, 2\right]$ intervallumon, a másik pedig a parabola merőleges egyenese feletti terület

a $\left[2, \frac{7}{3}\right]$ intervallumon, azaz

$$T_2 = \left| \int_{\sqrt{\frac{11}{3}}}^{2} \left(\frac{11}{6} - \frac{x^2}{2} \right) dx \right| + \left| \int_{2}^{\frac{7}{3}} \left(\frac{x}{2} - \frac{7}{6} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{27} \left(63 - 11\sqrt{33} \right) \right| + \left| -\frac{1}{36} \right| = \frac{1}{27} \left(11\sqrt{33} - 63 \right) + \frac{1}{36}.$$

A keresett terület $T = T_1 + T_2 = \frac{1}{4}$.

II.Megoldás. A keresett terület más felbontásban is kiszámolható. Az $[1, 2]$ intervallumon az érintő alatti területből kivonjuk a parabola alatti területet, majd a $\left[2, \frac{7}{3}\right]$ intervallumon az érintő alatti területből kivonjuk a merőleges alatti területet. Ekkor

$$T = \int_1^2 \left[-x + \frac{7}{3} - \left(\frac{11}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \right] dx + \int_2^{\frac{7}{3}} \left[-x + \frac{7}{3} - \left(\frac{x}{2} - \frac{7}{6} \right) \right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_2^{\frac{7}{3}} \left(-\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right]_1^2 + \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}x \right]_2^{\frac{7}{3}} =$$

$$= \left[\frac{8}{6} - \frac{4}{2} + 1 \right] - \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] + \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{49}{18} + \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3} \right] - \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{2} + 7 \right] = \frac{1}{4}.$$

5.6.2. Forgástestek térfogata

Ha az $y = f(x)$ folytonos görbe $[a, b]$ intervallum feletti ívét megforgatjuk az x-tengely körül, akkor egy $\mathcal{T}$ forgástestet kapunk. A kapott $\mathcal{T}$ forgástest térfogata

$$V(\mathcal{T}) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Vizsgáljuk meg, hogyan juthatunk el ehhez a képlethez az Arkhimédészi módszer segítségével. Tekintsük e célból az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos függvényt, az $[a, b]$ intervallum egy $\mathcal{F}$ felosztását és legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, a részintervallumok tetszőleges pontjainak egy kiválasztása. Legyen H_i $(i = 1, 2, ..., n)$ olyan henger, melynek magassága az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon megegyezik a forgást megfelelő szeletének magasságával, azaz Δx_i, alapjának sugara pedig $f(\xi_i)$. A H_i $(i = 1, 2, ..., n)$ henger térfogata így $V(H_i) = (f(\xi_i))^2 \pi \Delta x_i$. Az így kapott hengerek összege

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} V(H_i) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i))^2 \pi \Delta x_i.$$

Ha létezik a V_n összeg egyértelmű határértéke az $[a,b]$ intervallum minden $\mathcal{F}$ felosztására és minden $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ pontválasztásra, akkor ez a határérték a tekintett forgástest térfogata, azaz

$$V(\mathcal{T}) = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i))^2 \pi \Delta x_i = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Ha az $x = g(y)$ folytonos görbe $[c,d]$ intervallum feletti ívét forgatjuk meg az y-tengely körül, akkor a kapott $\mathcal{T}$ forgástest térfogata

$$V(\mathcal{T}) = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy.$$

FELADATOK.

1. Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely az $y = 2x + 3$ egyenes x-tengely körüli forgatásával keletkezik a $[-1, 4]$ intervallum felett.

Megoldás. Mivel a görbét az x-tengely körül forgatjuk, a keletkezett forgástest térfogatát a

$$V = \pi \int_{-1}^{4} (2x+3)^2 dx$$

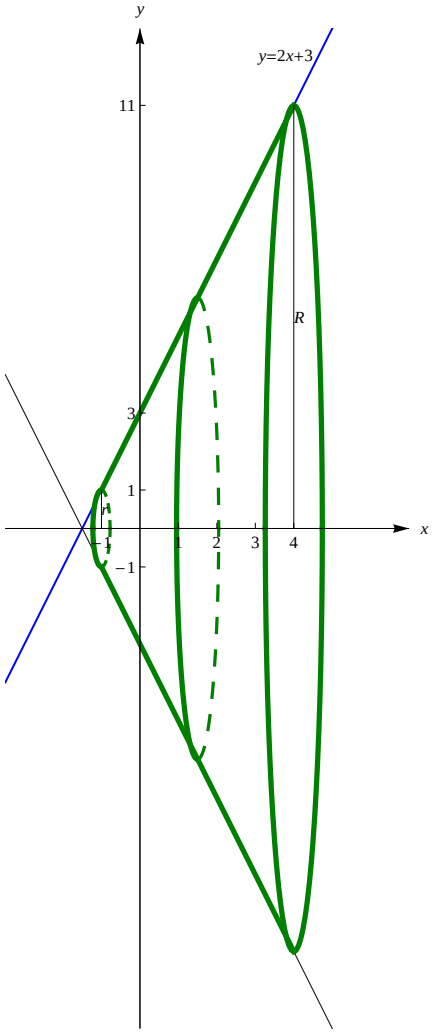
formula adja. Vezessük be a $t = 2x + 3$, $dt = 2dx$, $dx = \dfrac{dt}{2}$, helyettesítést. Ekkor

$$V = \frac{\pi}{2} \int_1^{11} t^2 dt = \frac{\pi t^3}{6}\Big|_1^{11} = \frac{665\pi}{3}.$$

Mivel a forgástest ebben az esetben egy csonkakúp, ahol $H = 5$, $r = y(-1) = 1$ és $R = y(4) = 11$, ezért a csonkakúp térfogatképletével is számolhatunk, vagyis

$$V = \frac{H\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) =$$

$$= \frac{5\pi}{3}(121 + 11 + 1) = \frac{665\pi}{3}.$$

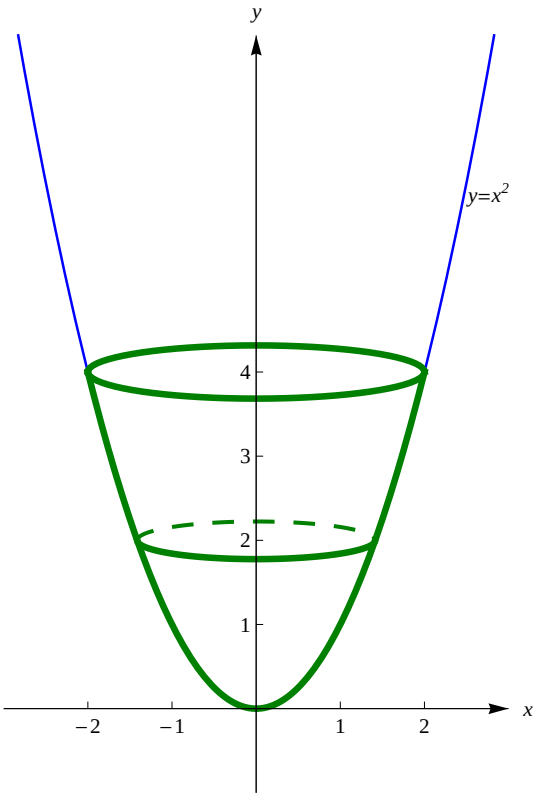


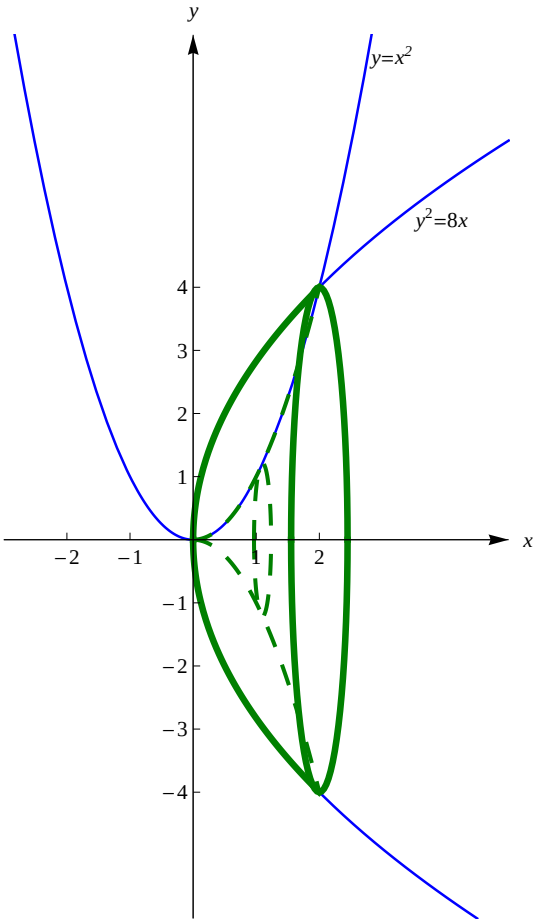
2. Számoljuk ki annak a forgásparaboloidnak a térfogatát, amely az $y = x^2$ parabola y-tengely körüli forgatásával keletkezik, ha $0 \le y \le 4$.

Megoldás. A görbét az y-tengely körül forgatjuk, tehát a térfogat kiszámításához ki kell fejeznünk a függvényt $x = \sqrt{y}$ alakban. Felhívjuk a figyelmet, hogy az

$x = -\sqrt{y}$ alak is megfelelő lenne, mert mindkét görbe forgatásával ugyanazt a forgástestet kapjuk.

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^4 y dy = \frac{\pi \, y^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi.$$





3. Számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $y = x^2$ és $y^2 = 8x$ parabolák által határolt zárt tartomány x-tengely körüli forgatásával kapunk.

Megoldás. A két görbe a $(0, 0)$ és $(2, 4)$ pontokban metszi egymást. $x \in [0, 2]$ esetén az $y^2 = 8x$ parabola íve távolabb van az x-tengelytől mint az $y = x^2$ parabolaív, ezért a keresett térfogatot úgy számítjuk ki, hogy a nagyobb térfogatból kivonjuk a kisebb térfogatot, vagyis

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^2 8x dx - \pi \int_0^2 \left(x^2\right)^2 dx = 8\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 =$$

$$= 4\pi \cdot (4 - 0) - \frac{\pi}{5} \cdot (32 - 0) = 16\pi - \frac{22}{5}\pi = \frac{48\pi}{5}.$$

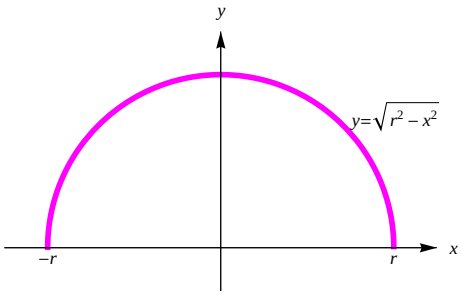
5.6.3. Ívhossz számítás

Legyen az f függvénynek folytonos első deriváltja az $[a,b]$ zárt intervallumon. Az f függvény grafikonja $A(a,f(a))$ és $B(b,f(b))$ pontokkal meghatározott ℓ ívének hosszát a következő határozott integrál adja meg:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \ .$$

FELADATOK.

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ függvény grafikonjának ívhosszát, ha $r>0$.
Megoldás. Mivel az x változó a $[-r,r]$ intervallumból veheti fel az értékeit, a függvény első deriváltja pedig $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, ezért a keresett ívhossz



$$\ell = \int_{-r}^{r} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx = \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}dx.$$

Vezessük be a $t=\dfrac{x}{r}$, $rdt=dx$ helyettesítést. Ekkor

$$\ell = r\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = r\arcsin t|_{-1}^{1} = r\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = r\pi,$$

s ez valóban az r sugarú kör félkörívének hosszúsága.

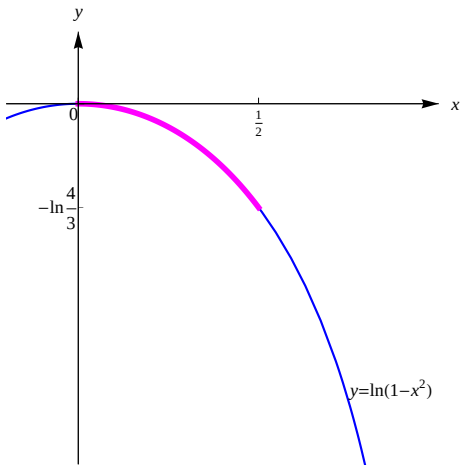
2. Számítsuk ki az $y=\ln\left(1-x^2\right)$ görbe ívének hosszát ha $0\le x\le \dfrac{1}{2}$.
Megoldás. Mivel

$$f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$$

esetén

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2},$$

így a keresett ívhossz



$$\ell = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{(1-x^2)^2}}dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2}dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2}{1-x^2}\right) dx = -x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - \ln 1 = \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

5.6.4. Forgástestek felszíne

Legyen $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ olyan, hogy $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén, és az f függvénynek legyen az $[a,b]$ intervallum felett folytonos deriváltja. Forgassuk meg az f függvény $[a,b]$ intervallumhoz tartozó grafikonját az x-tengely körül. Ekkor a kapott forgástest palástjának felszíne a következő formulával adott:

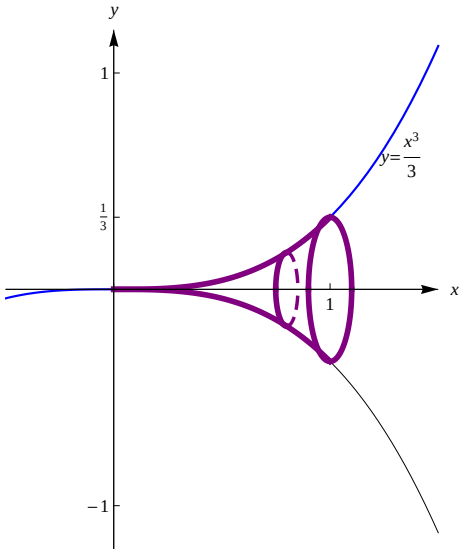
$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Ha az $x = g(y)$ folytonos görbe $[c,d]$ intervallum feletti ívét forgatjuk meg az y-tengely körül, akkor a kapott $\mathcal{T}$ forgástest térfogata

$$F = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}dy.$$

FELADATOK.

1. Számítsuk ki annak a forgástestnek a palástfelszínét, amelyet a $3y = x^3$ görbe $0 \leq x \leq 1$ intervallumhoz tartozó ívének x-tengely körüli forgatásával kapunk.



Megoldás. Mivel $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ esetén $f'(x) = x^2$, így a képlet alapján a keresett palástfelszínt az

$$F = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}dx$$

képlettel számoljuk. Vezessük be az $1+x^4 = t$, $4x^3dx = dt$, $x^3dx = \dfrac{dt}{4}$ helyettesítést. Ekkor

$$F = \frac{\pi}{6}\int_1^2 \sqrt{t}dt = \frac{\pi}{9}t\sqrt{t}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

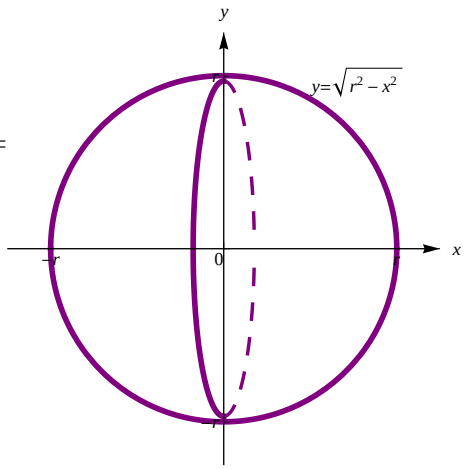
2. Számoljuk ki annak a gömbnek a felszínét, amely az $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ félkör x-tengely körüli forgatásával keletkezik.

Megoldás. Mivel az x változó a $[-r, r]$ intervallumból veszi az értékeit, a félkört meghatározó függvényértékek nemnegatívak. Az f függvény első deriváltja most $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, ezért a gömb felszíne

$$F = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx = 2\pi r\, x|_{-r}^{r} = 4r^2\pi.$$



5.7. Improprius integrál

5.7.1. Első típusú improprius integrál

5.11. Definíció. *Ha az $f : [a, \infty] \mapsto \mathbf{R}$ függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, minden $b > a$ esetén, az f függvény első típusú improprius integrálja az $[a, \infty]$ intervallumon a következő határérték:*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{T \to \infty} \int_a^{T} f(x)dx.$$

Ha a fenti határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy az $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ improprius integrál konvergens, ha nem létezik, akkor az adott integrál divergens.
Hasonlóan, az $f : [-\infty, b] \mapsto \mathbf{R}$ függvényre, amely integrálható a $[c, b]$ intervallumon, minden $c < b$ esetén, úgy definiáljuk az f függvény első típusú improprius integrálját a $[-\infty, b]$ intervallumon, mint a következő határértéket:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{T_1 \to -\infty} \int_{T_1}^{b} f(x)dx.$$

Végül, a definíció szerint az $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ függvényre, amely integrálható a $[c, d]$ intervallumon, minden $c, d \in \mathbf{R}$, $c < d$ esetén,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx\ .$$

Belátható, hogy ez a definíció nem függ az a számtól. Az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ improprius integrál a definíció szerint konvergens, ha mindkét jobb oldalon szereplő improprius integrál konvergens.

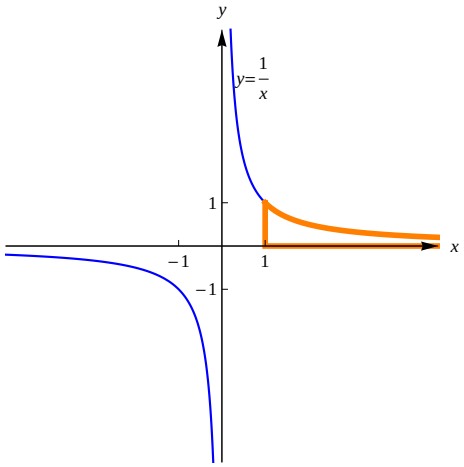
FELADATOK.

1. Határozzuk meg az $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ improprius integrál értékét.

Megoldás. Az improprius integrált úgy számoljuk, mint a határozott integrál határértékét:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{1}{x}dx =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\ln x\right]|_1^T = \lim_{T\to\infty}\ln T = \infty.$$



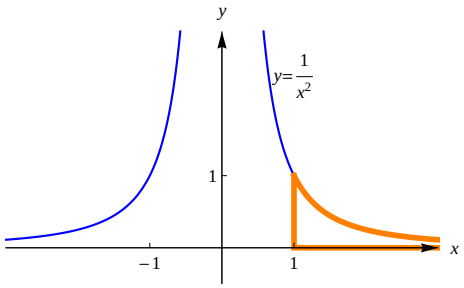
Mivel határozott integrálról, tehát területről van szó, ez egyúttal azt is jelenti, hogy az $y = \frac{1}{x}$ görbe és az x-tengely közötti terület az $x = 1$ egyenestől jobbra végtelen nagy.

2. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{x^2}$ görbe és az x-tengely közötti terület nagyságát $x \geq 1$ esetén.

Megoldás. Ezt a területet egy első típusú improprius integrál segítségével lehet kiszámítani, azaz

$$T = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{T\to\infty}\int_1^T x^{-2}dx =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_1^T = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{T}+1\right) = 1.$$



Ez az improprius integrál tehát konvergens, a keresett terület mérőszáma 1, tehát véges.

3. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{x^2+25}$ görbe és az x-tengely közötti területet a görbét meghatározó függvény teljes értelmezési tartományán.

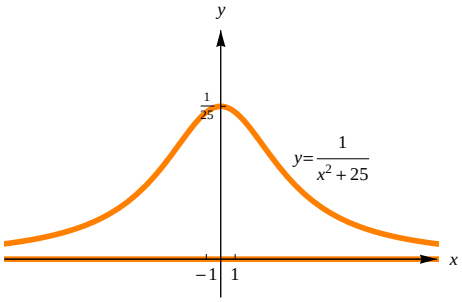
Megoldás. Az $f(x) = \frac{1}{x^2+25}$ függvény értelmezési tartománya a valós számok $\mathbf{R}$ halmaza. Az f függvény páros, tehát a grafikonja, és így a keresett terület is, szimmetrikus az y-tengelyre, ezért a területet a következő módon számolhatjuk ki:

$$T = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+25} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+25} = 2\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{dx}{x^2+25} = \frac{2}{25}\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{dx}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1}.$$

Vezessük be az $\frac{x}{5} = t$, $dx = 5dt$ helyettesítést. Ekkor

$$T = \frac{2}{5}\lim_{T\to\infty}\int_0^{\frac{T}{5}}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{5}\lim_{T\to\infty}(\operatorname{arctg} t)\Big|_0^{\frac{T}{5}} =$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{T\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{T}{5} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5}.$$



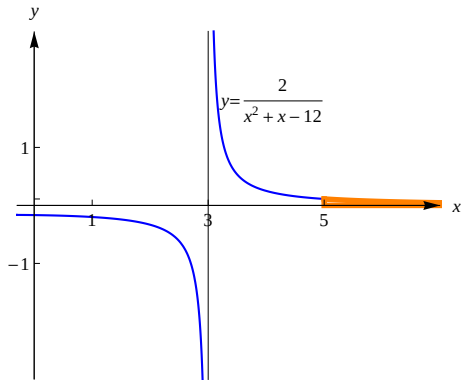
4. Számítsuk ki az $\int_5^\infty \frac{2}{x^2+x-12}dx$ improprius integrált.

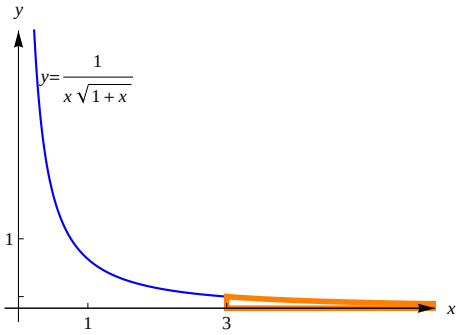
Megoldás.

$$\int_5^\infty \frac{2}{x^2+x-12}dx = 2\int_5^\infty \frac{1}{(x-3)(x+4)}dx =$$

$$= 2\lim_{T\to\infty}\int_5^T\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x+4}\right)dx = \frac{2}{7}\lim_{T\to\infty}\left[\left(\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|\right)\Big|_5^T\right] =$$

$$= \frac{2}{7}\lim_{T\to\infty}\left(\ln\left|\frac{T-3}{T+4}\right| - \ln\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{7}\cdot\left(\ln 1 - \ln\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{7}\ln\frac{9}{2}.$$





5. Számítsuk ki az $\int_3^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ improprius integrált.

Megoldás. Az adott improprius integrált az $1+x=t^2$, $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ helyettesítéssel oldhatjuk meg a következő módon:

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \int_2^\infty \frac{2tdt}{(t^2-1)\,t} = 2\lim_{T\to\infty}\int_2^T \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\lim_{T\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^T\right] = \lim_{T\to\infty}\left(\ln\left|\frac{T-1}{T+1}\right| - \ln\frac{1}{3}\right) = \ln 1 - \ln\frac{1}{3} = \ln 3.$$

5.7.2. Második típusú improprius integrál

5.12. Definíció. *Ha az* $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ *függvény integrálható a* $[c, d] \subset [a, b]$ *intervallumon, minden* $c, d \in (a, b)$ *esetén, és a következő egyenlőségek egyike érvényes:*

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = -\infty,$$

(azaz, ha f *nemkorlátos a* b *bármely környezetében), akkor az* f *függvény második típusú improprius integrálja az* $[a, b]$ *intervallumon a következő határérték:*

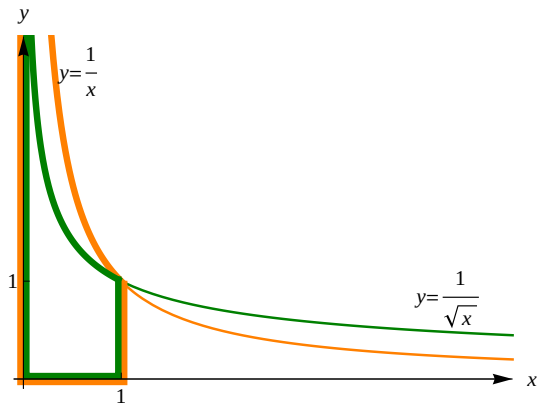
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Mint az első típusú improprius integrálok esetében, az $\int_a^b f(x)dx$ integrál konvergens, illetve divergens, ha a fenti határérték létezik, illetve nem létezik. Az f függvény második típusú improprius integráljához hasonlóan definiáljuk az $[a, b]$ intervallumon az improprius integrált, ha érvényes a következő egyenlőségek egyike:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty.$$

FELADATOK.

1. Számítsuk ki az $y = \dfrac{1}{x}$ görbe, valamint az $x = 0$, $x = 1$ és az $y = 0$ egyenesek közötti terület nagyságát.



Megoldás. Mivel az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény nem értelmezett $x = 0$-ban, ezért a keresett terület egy második típusú improprius integrállal számolható ki:

$$T = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|x| \Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = 1 - (-\infty) = \infty.$$

A kapott integrál tehát divergens, a keresett terület végtelen nagy.

2. Számítsuk ki az $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ görbe, valamint az $x = 0$, $x = 1$ és az $y = 0$ egyenesek által határolt terület nagyságát.

Megoldás. Az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény nem értelmezett az $x = 0$ pontban, így a keresett területet egy második típusú improprius integrállal számolhatjuk ki. Ebben az esetben

$$T = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(2\sqrt{x}\right) \Big|_\varepsilon^1 = 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \sqrt{\varepsilon}\right) = 2,$$

tehát most az integrál konvergens, a területet meghatározó mérőszám pedig 2.

3. Számoljuk ki az $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ integrál értékét.

Megoldás. Az integrálandó függvény nem értelmezett az integrál felső határában, tehát improprius integrálról van szó.

$$I = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Vezessük be a $t = 1-x^2$, $dt = -2xdx$, $-dt = 2xdx$ helyettesítést. Ekkor

$$I = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{1-(1-\varepsilon)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{t}\Big|_1^{1-(1-\varepsilon)^2} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}-\sqrt{1}\right) = 2.$$

4. Számítsuk ki az $\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ improprius integrált.

Megoldás. Az integrandus nem értelmezett $x = 0$ pontban. Ezért második típusú improprius integrálról van szó. Ekkor

$$\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\frac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x}\right)\Big|_\varepsilon^1\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{9}{7}+6-\frac{9}{7}\varepsilon^2\sqrt[3]{\varepsilon}-6\sqrt[3]{\varepsilon}\right) = \frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}.$$

5. Számítsuk ki az $\int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$ improprius integrált.

Megoldás. Vegyük észre, hogy az $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ függvény nem értelmezett $x = 2$-ben, és ez az $[1,10]$ intervallumba esik. Tehát az integrált szét kell bontani két integrál összegére, melyek közül az egyik az $[1,2]$, másik a $[2,10]$ intervallumra vonatkozik. Ekkor

$$\int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}+\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_1^{2-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{2+\varepsilon_2}^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)\Big|_1^{2-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)\Big|_{2+\varepsilon_2}^{10} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(-\varepsilon_1)^2}-\frac{3}{2}\cdot 1\right) + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\varepsilon_2)^2}\right) = \frac{9}{2}.$$

6. Differenciálegyenletek

6.1. A differenciálegyenlet fogalma

Meghatározni az f függvény F primitív függvényét annyit jelent, mint találni egy olyan F függvényt, amely differenciálható az adott intervallumon és amelyre érvényes, hogy

$$F'(x) = f(x). \tag{6.1}$$

A probléma másik megfogalmazása: megkeresni az f függvény határozatlan integrálját az adott intervallumon annyit jelent, mint megadni a (6.1) függvényegyenlet minden megoldását az adott intervallumon.

A természetben bizonyos fizikai problémák megoldása matematikai szempontból egy-egy ismeretlen függvény meghatározását teszi szükségessé. Ez csak akkor lehetséges, ha az adott problémára fel tudunk írni egy matematikai modellt, azaz az ismeretlen függvényre egy olyan egyenletet, amelyet annak ki kell elégítenie. Ezekben az egyenletekben, mint például a (6.1)-ben is, az ismeretlen függvényen kívül szerepelhetnek annak deriváltjai is. Az ilyen egyenleteket nevezzük differenciálegyenleteknek. A differenciálegyenletek elmélete igen fontos és szerteágazó matematikai tudományterület, amelynek számos különböző alkalmazása van.

6.1. Példa. Keressük meg az xOy síkban azokat a görbéket, amelyek bármely pontjában az érintő iránytényezője fordítottan arányos az érintési pont abszcisszájával.

Megoldás. Ha $y = y(x)$ a keresett görbe egyenlete, akkor

$$y' = \frac{k}{x}$$

kell, hogy teljesüljön, ahol k az arányossági tényező. Ekkor

$$y = \int \frac{k}{x} dx = k \int \frac{dx}{x} = k \ln |x| + C,$$

ahol C tetszőleges valós állandó. Ebből a görbeseregből egy meghatározott görbét úgy tudunk kiválasztani, ha megadunk még valamilyen feltételt. Keressük a görbeseregből azt a görbét, amely áthalad az $M(1, 0)$ ponton. Ekkor a keresett görbe teljesíti az

$$y(1) = 0, \quad \text{azaz} \quad k \ln 1 + C = 0$$

feltételt, ahonnan $C = 0$ adódik, azaz a kiválasztott görbe az $y = k \ln |x|$.

6.2. Példa. Adjuk meg az $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ görbeseregnek megfelelő differenciálegyenletet, ahol C_1 és C_2 valós paraméterek.

Megoldás. Ha kétszer differenciáljuk a függvényt, akkor

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}, \quad y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

adódik, ahonnan a keresett differenciálegyenlet $y'' = y$.

6.1. Definíció. *Azt a függvényegyenletet, amely a független változót, az ismeretlen függvényt, valamint az ismeretlen függvény deriváltjait tartalmazza, differenciálegyenletnek nevezzük. A differenciálegyenlet rendje az ismeretlen függvény differenciálegyenletben szereplő legmagasabb deriváltjának a rendje.*

Az algebrai egyenletekhez hasonlóan a differenciálegyenletekben is van ismeretlen, de az most nem szám, hanem függvény. Az egyenlet megoldásakor olyan $y = y(x)$ függvényeket keresünk, amelyeket deriváltjaikkal együtt a differenciálegyenletbe helyettesítve az x változóban egy azonosságot kapunk. Az egyszerűbb felírás kedvéért, az x független változójú $y(x)$ függvény helyett a differenciálegyenletekben csak y-t írunk.
A fenti definíció alapján, $y' = x^2$ elsőrendű differenciálegyenlet, $y'' - y = 0$ pedig másodrendű differenciálegyenlet.
A modellezett fizikai problémától függően az x változó helyett sokszor más betűt használunk, legtöbbször t-t, amely az időre utal; ekkor y helyett x-et vagy s-t, y' helyett x'-t, $\dot{x}$-ot vagy s'-t, $\dot{s}$-ot írunk.
Adott $F : (a, b) \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ és $f : (a, b) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekre az elsőrendű differenciálegyenlet implicit alakja

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6.2}$$

explicit alakja pedig

$$y' = f(x, y).$$

Adott $G : (a, b) \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ és $g : (a, b) \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényekre a másodrendű differenciálegyenlet implicit alakja

$$G(x, y, y', y'') = 0, \tag{6.3}$$

explicit alakja pedig

$$y'' = g(x, y, y').$$

6.2. Definíció. *Az $y = y(x)$ függvény a (6.2), illetve (6.3) differenciálegyenlet megoldása az (a, b) intervallumon, ha $y = y(x)$ egyszer, illetve kétszer differenciálható az (a, b) intervallumon, és deriváltjaival együtt kielégíti a megfelelő differenciálegyenletet. Ha az $y = y(x)$ függvény megoldása a differenciálegyenletnek, akkor az $y = y(x)$ függvény grafikonját megoldásgörbének nevezzük.*

Megoldani egy differenciálegyenletet annyit jelent, mint megkeresni minden megoldását. A differenciálegyenletek elméletében a differenciálegyenleteknek különböző megoldásai léteznek.

6.3. Definíció. *Az $y = y(x, C)$ függvénycsaládot, ahol C tetszőleges valós állandó, az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük, ha az*

$$y = y(x, C)$$

függvények mindegyike megoldása az adott egyenletnek.

Az általános jelző egy kicsit félrevezető. Előfordulhat ugyanis olyan eset, hogy az általános megoldás nem szolgáltatja az egyenlet összes megoldását. Ez azt jelenti, hogy van az egyenletnek olyan megoldása, amely nem kapható meg a C paraméter alkalmas megválasztásával. Az ilyen megoldást *szinguláris megoldásnak* nevezzük.

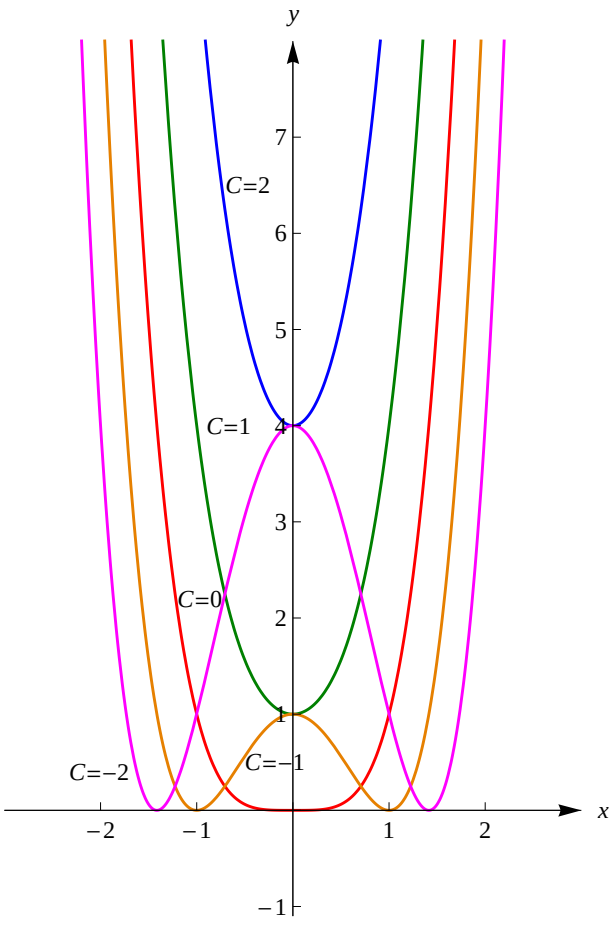
6.4. Definíció. *Az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet minden olyan megoldását, amelyet az egyenlet általános megoldásából kapunk a C paraméter egy konkrét (megengedett) $C = C_0$ értékére, partikuláris megoldásnak nevezzük.*

Az elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása egy egyparaméteres görbesereget határoz meg. Ennek a görbeseregnek egy görbéje egy partikuláris megoldás grafikonját ábrázolja.

6.3. Példa. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy az $y = (x^2 + C)^2$ az

$$y' = 4x\sqrt{y}$$

egyenlet általános megoldása. Az egyenlet partikuláris megoldása például $C = 1$ esetén az $y = (x^2+1)^2$, $C = -1$ esetén az $y = (x^2-1)^2$ vagy $C = 0$ esetén az $y = x^4$. Az egyenletnek megoldása az $y \equiv 0$ is. A C paramétert nem tudjuk úgy választani, hogy $(x^2 + C) \equiv 0$ egy intervallumon teljesüljön. Ezért az egyenletnek $y \equiv 0$ szinguláris megoldása.



Általában az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldását keressük, amely áthalad egy megadott (x_0, y_0) ponton, azaz eleget tesz az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek. Az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétellel együtt kezdetiérték-problémát alkot.

6.4. Példa. Tekintsük az $y = xy'$ differenciálegyenletet. Határozzuk meg az adott differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely eleget tesz az $y(-3) = \frac{1}{3}$ kezdeti feltételnek.

Megoldás. Írjuk fel az egyenletet

$$y = x\frac{dy}{dx}$$

alakban. Ekkor

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

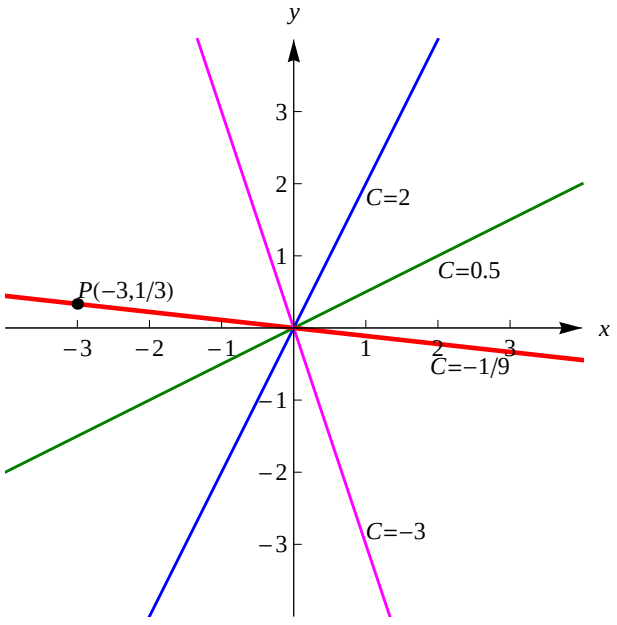
($xy \neq 0$; $y = 0$ egy megoldása a differenciálegyenletnek), ahonnan a két oldal integrálásával kapjuk, hogy

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

azaz $|y| = C_1|x|$. Innen $y = C_1 x$ vagy $y = -C_1 x$, vagyis

$$y = Cx, \quad C \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

az általános megoldás.
Minden (x_0, y_0), $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pont esetén létezik az $y = Cx$ görbeseregnek egy olyan egyértelmű megoldása, amely tartalmazza a megadott pontot. Eszerint a megadott $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$ pontra az $\frac{1}{3} = -3C$ egyenletnek $C = -\frac{1}{9}$ egyértelmű megoldása, tehát a keresett partikuláris megoldás $y = -\frac{x}{9}$.



6.5. Definíció. *Az $y = y(x, C_1, C_2)$ függvénycsaládot, ahol C_1 és C_2 tetszőleges egymástól független valós állandók, az $y'' = g(x, y, y')$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük, ha az $y = y(x, C_1, C_2)$ függvények mindegyike megoldása az adott egyenletnek.*

A másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása egy kétparaméteres görbesereget határoz meg.

6.6. Definíció. *Az $y'' = g(x, y, y')$ másodrendű differenciálegyenlet minden olyan megoldását, amelyet az egyenlet általános megoldásából kapunk vagy csak a C_1, vagy csak a C_2, vagy mindkét paraméter konkrét $C_1 = C_0^1$ vagy $C_2 = C_0^2$ értékére, partikuláris megoldásnak nevezzük.*

6.5. Példa. Az $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ függvény az $y'' + y = 0$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása, $y = C_1 \cos x$, $y = C_2 \sin x$, $y = \cos x - \sin x$ pedig partikuláris megoldások.

Általában az $y'' = g(x, y, y')$ másodrendű differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldását keressük, amely áthalad egy megadott (x_0, y_0) ponton és x_0 pontban y_1 a meredeksége, azaz eleget tesz az $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ kezdeti feltételnek. Az $y'' = g(x, y, y')$ másodrendű differenciálegyenlet az $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ kezdeti feltétellel együtt kezdetiérték-problémát alkot.

6.2. Elsőrendű differenciálegyenletek

6.2.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

6.7. Definíció. *Az $y' = f(x)g(y)$ alakban felírható elsőrendű differenciálegyenletet szétválasztható változójú differenciálegyenletnek nevezzük.*

Ha a deriváltra a Leibniz-féle jelölést használjuk, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, akkor az $y' = f(x)g(y)$ egyenlet

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

alakban írható fel. A megoldás létezésének biztosítása érdekében tegyük fel, hogy f és g folytonosak a megfelelő intervallumokban. Ha $g(y) \neq 0$, akkor az $y' = f(x)g(y)$ egyenlet ekvivalens a

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

egyenlettel, és az egyenlet általános megoldása ekkor

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx,$$

amiből $\dfrac{1}{g(y)}$ és $f(x)$ primitív függvényeinek, mondjuk $G(y)$ és $F(x)$ függvények meghatározása után azt kapjuk, hogy

$$G(y) = F(x) + C,$$

ahol C tetszőleges valós állandó.
Ha a $g(y) = 0$ egyenletnek b_1, b_2, ..., b_k valós megoldásai, akkor a fenti megoldások mellett az $y = b_1$, $y = b_2$, ...,$y = b_k$ függvények is megoldásai az $y' = f(x)g(y)$ egyenletnek.

FELADATOK.

1. Határozzuk meg az $y' = -\dfrac{x}{y}$ differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely áthalad a $P(1,1)$ ponton.

Megoldás. Alkalmazzuk az $y' = \dfrac{dy}{dx}$ jelölést. Ha $y \neq 0$, akkor a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk, amiből

$$ydy = xdx.$$

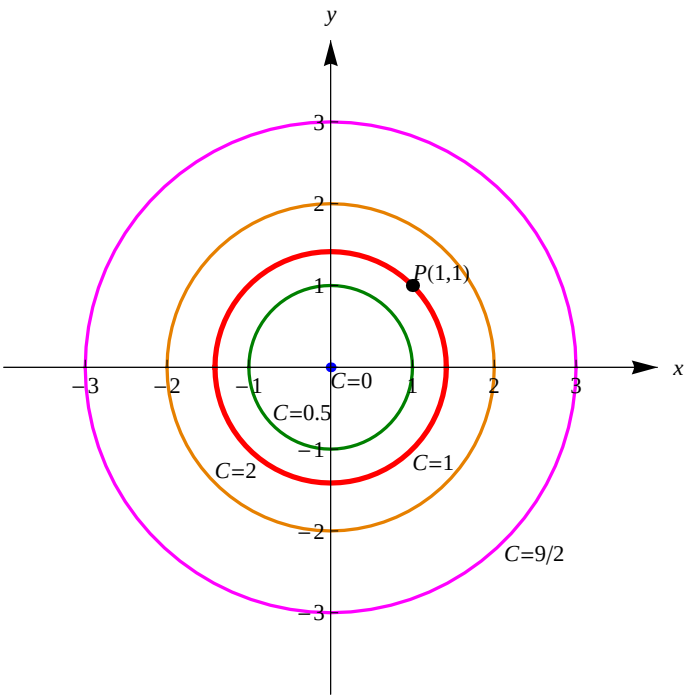
Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát, ekkor az

$$\int ydy = \int xdx$$

egyenlőséget kapjuk, innen pedig integrálás után

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C, \quad \text{azaz} \quad x^2 + y^2 = 2C.$$

Ha $2C = r^2$, akkor az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű görbesereg, azaz koncentrikus középponti körvonalak képezik az általános megoldást. Ha a $P(1,1)$ ponton áthaladó partikuláris megoldást keressük, akkor a $P(1,1)$ ponton áthaladó körvonal egyenletét keressük. Ha belyettesítjük a P pont megfelelő koordinátáit az általános megoldásba, akkor $1^2 + 1^2 = r^2$ azaz $r^2 = 2$. A keresett partikuláris megoldás tehát $x^2 + y^2 = 2$.



2. Határozzuk meg az $y' - \dfrac{2xy}{x^2-1} = 0$ differenciálegyenlet $y(\sqrt{2}) = 1$ feltételt kielégítő megoldását.

Megoldás. Az egyenlet felírható

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{x^2-1} = 0$$

alakban is, amelyből megállapítható, hogy szétválasztható változójú differenciálegyenletről van szó. A folytonosság biztosítása miatt $x \neq 1$ és $x \neq -1$. Ha $y \neq 0$, akkor a fenti egyenlet

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2-1}$$

alakban is felírható. Integrálva az egyenlet mindkét oldaát adódik, hogy

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{x^2-1}.$$

A jobboldali integrálban vezessük be az $x^2 - 1 = t$ helyettesítést, amiből $2xdx = dt$. Integrálás után

$$\ln|y| = \ln|x^2-1| + \ln C, \quad C \in \mathbf{R}^+,$$

innen pedig

$$\ln|y| = \ln C|x^2-1|.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt kapjuk, hogy

$$|y| = C|x^2-1|,$$

ahonnan $y = C(x^2-1)$ vagy $y = -C(x^2-1)$, $C \in \mathbf{R}^+$. Ha $C_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ konstanst választunk, akkor a két egyenlet közös alakja

$$y = C_1(x^2-1), \quad C_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Vegyük észre, hogy $y = 0$ is megoldása az egyenletnek, mely $C_1 = 0$ esetén az általános megoldásból is megkapható, tehát az

$$y = C_1(x^2-1), \quad C_1 \in \mathbf{R},$$

függvénycsalád alkotja az általános megoldást, s ezen függvények grafikonjai egy parabolasereget alkotnak. Ha az általános megoldás függvényeiből azt a partikuláris megoldást keressük, amely kielégíti az $y(\sqrt{2}) = 1$ feltételt, akkor azt a megoldást keressük, amely $x = \sqrt{2}$ esetén $y = 1$ értéket ad, azaz teljesül az

$$1 = C_1(1^2-1)$$

egyenlőség, ahonnan $C_1 = 1$. A keresett partikuláris megoldás tehát $y = x^2 - 1$.

3. Határozzuk meg a $\sin x dx + \cos y dy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely eleget tesz az $y(0) = \pi$ feltételnek.

Megoldás. Mivel a megadott differenciálegyenlet ekvivalens a

$$\sin x dx = -\cos y dy$$

egyenlettel, megállapíthatjuk, hogy egy szétválasztható változójú differenciálegyenletről van szó. Integrálás után adódik:

$$\int \sin x dx = -\int \cos y dy$$

$$-\cos x + C = -\sin y,$$

tehát az általános megoldás

$$\sin y - \cos x + C = 0.$$

A partikuláris megoldás meghatározásához meg kell határozni a C állandó értékét, amelyre teljesül az $y(0) = \pi$ feltétel. Tehát keressük azt a megoldást, amely áthalad a $(0, \pi)$ ponton. A

$$\sin \pi - \cos 0 + C = 0$$

feltételből adódik, hogy $C = 1$, vagyis a keresett partikuláris megoldás

$$\sin y - \cos x + 1 = 0.$$

4. Oldjuk meg az $y' + y^2 = 1$ differenciálegyenletet.

Megoldás. A változók szétválasztásához használjuk fel az $y' = \dfrac{dy}{dx}$ jelölést. Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \quad \text{és} \quad \frac{dy}{1-y^2} = dx, \quad \text{ha} \quad y \neq \pm 1.$$

Mindkét oldal integrálásával kapjuk, hogy

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int dx.$$

A baloldali integrál racionális törtfüggvény integrálja. Elemi törtekre való bontás után kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy = x + C,$$

ahol C tetszőleges valós szám, innen pedig integrálás után

$$\frac{1}{2}\left(-\ln|1-y| + \ln|1+y|\right) = x + C$$

adódik. Az egyenlet bal oldalának rendezése után az egyenlet

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + C$$

alakú lesz, általános megoldása pedig

$$y = \frac{e^{2(x+C)} - 1}{e^{2(x+C)} + 1}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

5. Határozzuk meg az $y' = \dfrac{-x - xy}{y + xy}$, $y(-2) = -2$ kezdetiérték-probléma megoldását.

Megoldás. Alkalmazzuk az $y' = \dfrac{dy}{dx}$ jelölést és bontsuk tényezőire az egyenlet jobb oldalát. Ha $y \neq 0$ és $x \neq -1$, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x(1+y)}{y(1+x)}.$$

Ha $y \neq -1$, akkor a változók szétválasztása után kapjuk, hogy

$$\frac{ydy}{1+y} = -\frac{xdx}{1+x},$$

mindkét oldal integrálása után pedig a következő adódik:

$$\int \frac{ydy}{1+y} = -\int \frac{xdx}{1+x}$$

$$\int \frac{y+1-1}{1+y}dy = -\int \frac{x+1-1}{1+x}dx$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)dy = -\int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\int dy - \int \frac{1}{1+y}dy = -\int dx + \int \frac{1}{1+x}dx.$$

A megfelelő primitív függvények meghatározása után kapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y - \ln|1+y| = -x + \ln|1+x| + C,$$

illetve más elrendezésben:

$$y + x - C = \ln|1+x| + \ln|1+y|.$$

Mivel az $y(-2) = -2$ kezdeti feltételnek kell teljesülnie, ezért

$$-2 - 2 - C = \ln|1-2| + \ln|1-2|,$$

$$-4 - C = 2\ln 1, \quad \text{ahonnan} \quad C = -4.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása tehát

$$y + x + 4 = \ln|(1+x)(1+y)|, \quad \text{azaz} \quad e^{y+x+4} = |(1+x)(1+y)|.$$

6.2.2. Változóiban homogén differenciálegyenlet

6.8. Definíció. *Az* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *alakú differenciálegyenletet változóiban homogén (vagy röviden homogén) differenciálegyenletnek nevezzük.*

Ezt az egyenlet az $y = tx$ helyettesítéssel, ahol $t = t(x)$ az új ismeretlen függvény, szétválasztható változójú differenciálegyenletre hozhatjuk. Ekkor $y' = t'x + t$, majd a homogén egyenletbe való behelyettesítés után $t'x + t = f(t)$ adódik, azaz

$$\frac{dt}{dx}x + t = f(t), \quad \text{vagyis, hogy} \quad \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x},$$

az $f(t) \neq t$ feltétel mellett. A jobb és bal oldal integrálása után adódik, hogy

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln|x| + C \ .$$

Ha az $f(t) = t$ egyenletnek t_1, t_2, ..., t_k megoldásai, akkor a

$$t = t_1, \ t = t_2, \ ..., \ t = t_k$$

konstans függvények megoldásai az átalakított egyenletnek, az

$$y = t_1 x, \ y = t_2 x, \ ..., \ y = t_k x$$

lineáris függvények pedig az eredeti homogén egyenletnek megoldásai.

FELADATOK.

1. Határozzuk meg az $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Vegyük észre, hogy az adott egyenlet $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú, tehát változóiban homogén differenciálegyenlet. Alkalmazzuk az $y = tx$, illetve $\frac{y}{x} = t$ helyettesítést, ahonnan $y' = t'x + t$, mert $t = t(x)$ az új ismeretlen függvény. Ekkor

$$t'x + t = e^t + t,$$

ebből pedig

$$x\frac{dt}{dx} = e^t.$$

A változók szétválasztása után kapjuk, hogy

$$\frac{dt}{e^t} = \frac{dx}{x},$$

majd mindkét oldal integrálásával az

$$\int e^{-t} dt = \int \frac{dx}{x},$$

illetve

$$-e^{-t} = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0$$

egyenlőséget, ahonnan

$$e^{-t} = \ln\frac{1}{C|x|}, \quad \text{azaz} \quad t = -\ln\left(\ln\frac{1}{C|x|}\right).$$

Visszahelyettesítés után adódik az

$$\frac{y}{x} = -\ln\left(\ln\frac{1}{C|x|}\right), \quad \text{azaz} \quad y = -x\ln\left(\ln\frac{1}{C|x|}\right)$$

általános megoldás.

2. Határozzuk meg az $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely áthalad a $(0, 1)$ ponton.

Megoldás. Ha $y \neq \pm x$, $x \neq 0$ és az egyenlet jobb oldalán levő racionális törtfüggvényt x^2-tel egyszerűsítjük, akkor

$$y' = \frac{\frac{2xy}{x^2}}{\frac{x^2-y^2}{x^2}}, \quad \text{azaz} \quad y' = \frac{2\cdot\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

adódik, amiből látszik, hogy az egyenletünk $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ alakú, tehát változóiban homogén differenciálegyenlet. Alkalmazzuk az $y = tx$, illetve $\dfrac{y}{x} = t$ helyettesítést, ahonnan $y' = t'x + t$, mert $t = t(x)$ az új ismeretlen függvény. Ekkor

$$t'x + t = \frac{2t}{1-t^2},$$

ahonnan rendezéssel az

$$xt' = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \text{azaz} \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{t^3+t}{1-t^2}$$

alakú szétválasztható változójó differenciálegyenletet kapjuk. A változók szétválasztása után kapjuk, hogy

$$\frac{1-t^2}{t^3+t}dt = \frac{dx}{x},$$

a két oldal integrálásával pedig, hogy

$$\int\frac{1-t^2}{t^3+t}dt = \int\frac{dx}{x}.$$

Mivel a baloldali integrandus egy racionális törtfüggvény, amely elemi törtek összegére bontható, azaz

$$\frac{1-t^2}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2+1}$$

érvényes, ezért a továbbiakban

$$\int \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2+1} \right) dt = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0.$$

A baloldali második integrálban bevezetjük a $t^2 + 1 = z$, $2tdt = dz$ helyettesítést, így

$$\ln|t| - \ln|z| = \ln C|x|, \quad \text{illetve} \quad \left| \frac{t}{t^2+1} \right| = C|x|.$$

Ebből visszahelyettesítés és rendezés után

$$\frac{y}{x^2+y^2} = C_1, \quad C_1 \in \mathbf{R},$$

az általános megoldás.
A keresett partikuláris megoldásra teljesül, hogy ha $x = 0$, akkor $y = 1$. Ekkor

$$\frac{1}{0^2+1^2} = C_1,$$

azaz $C_1 = 1$, s ebből a keresett partikuláris megoldás

$$y = x^2 + y^2.$$

3. Oldjuk meg az $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$ differenciálegyenletet, ha $x \neq 0$.

Megoldás. Fejezzük ki az adott egyenletből az ismeretlen függvény deriváltját. Ekkor

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x}\ln\frac{x+y}{x},$$

innen pedig

$$y' = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

Megállapíthatjuk, hogy a differenciálegyenlet változóiban homogén, tehát bevezetjük a $t = \dfrac{y}{x}$ helyettesítést, ahonnan $y' = t + xt'$. Az egyenlet most

$$t + xt' = t + (1+t)\ln(1+t)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletté alakul át, amely a változók szétválasztása után

$$\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \frac{dx}{x}$$

alakra hozható. Integráljuk a fenti egyenlet mindkét oldalát. Ekkor

$$\int \frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Ha a bal oldalon alkalmazzuk az $\ln(1+t) = z$ helyettesítést, akkor $\dfrac{dt}{1+t} = dz$, és így

$$\int \frac{dz}{z} = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0$$

adódik, ahonnan

$$\ln|z| = \ln C|x|, \quad \text{illetve} \quad z = C_1 x, \quad C_1 \in \mathbf{R}.$$

Visszatérve az eredeti változókra kapjuk, hogy

$$\ln(1+t) = C_1 x, \quad \text{illetve} \quad e^{C_1 x} = 1 + \frac{y}{x}, \quad C_1 \in \mathbf{R}.$$

Ebből az általános megoldás

$$\frac{y}{x} = e^{C_1 x} - 1, \quad \text{amiből} \quad y = x\left(e^{C_1 x} - 1\right), \quad C_1 \in \mathbf{R}.$$

4. Határozzuk meg az $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$ differenciálegyenlet $y(1) = 1$ kezdeti feltételt teljesítő megoldását.

Megoldás. Az egyenlet rendezése után adódik, hogy

$$(x^3 + y^3)dx = 3xy^2 dy, \quad \text{illetve} \quad \frac{x^3 + y^3}{3xy^2} = \frac{dy}{dx}, \quad \text{ha} \quad xy \neq 0.$$

Alkalmazzuk a $\dfrac{dy}{dx} = y'$ helyettesítést és egyszerűsítsük a racionális törtfüggvényt x^3-nal. Ekkor a differenciálegyenlet felírható mint

$$y' = \frac{\frac{x^3+y^3}{x^3}}{\frac{3xy^2}{x^3}}, \quad \text{illetve} \quad y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{3 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Megállapíthatjuk, hogy a kapott egyenlet elsőrendű változóiban homogén differenciálegyenlet, ezért bevezetjük a $t = \dfrac{y}{x}$ helyettesítést ahonnan $y' = t + xt'$.
Behelyettesítés után a

$$t + xt' = \frac{1 + t^3}{3t^2}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk, amely a változók szétválasztása után az

$$\frac{1}{x}dx = \frac{3t^2}{1 - 2t^3}dt$$

alakra hozható. Integrálva a fenti egyenlet mindkét oldalát kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{3t^2}{1 - 2t^3}dt.$$

Vezessük be az $s = 1 - 2t^3$ helyettesítést a jobb oldalon. Ekkor $ds = -6t^2 dt$ és

$$\ln|x| + \ln C = -\frac{1}{2}\int \frac{ds}{s}, \quad C > 0.$$

Integrálás és rendezés után adódik, hogy

$$\ln C|x| = -\frac{1}{2}\ln|1 - 2t^3| \quad \text{és} \quad C^2 x^2 = \frac{1}{|1 - 2t^3|}.$$

Visszatérve az eredeti változóra, elhagyva az abszolút értéket, a $+C^2$, illetve $-C^2$ állandókat C_1-gyel jelölve ($C_1 \in \mathbf{R}$) és rendezve az egyenletet kapjuk a

$$C_1(x^3 - 2y^3) = x, \quad C_1 \in \mathbf{R}$$

általános megoldást. Az $y(1) = 1$ kezdeti feltételt teljesítő megoldásra igaz, hogy $x = 1$ esetén $y = 1$ is teljesül. Ekkor

$$C_1(1^3 - 2 \cdot 1^3) = 1,$$

ahonnan $C_1 = -1$ és a keresett partikuláris megoldás

$$2y^3 - x^3 = x.$$

5. Oldjuk meg az $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát, ha $x \neq 0$.

Megoldás. Fejezzük ki az adott egyenletből az ismeretlen függvény deriváltját. Ha $y \neq 0$, akkor

$$xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \quad \text{azaz} \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Megállapíthatjuk, hogy a kapott egyenlet elsőrendű változóiban homogén differenciálegyenlet, ezért bevezetjük a $t = \dfrac{y}{x}$ helyettesítést ahonnan $y' = t + xt'$.
Behelyettesítés után a

$$t + xt' = t + \frac{1}{\operatorname{arctg} t}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk, amely a változók szétválasztása után az

$$\operatorname{arctg} t dt = \frac{1}{x} dx$$

alakra hozható. Integrálva a fenti egyenlet mindkét oldalát kapjuk, hogy

$$\int \operatorname{arctg} t dt = \int \frac{1}{x} dx.$$

A bal oldali integrál parciális integrálással oldható meg. Legyen $u = \operatorname{arctg} t$ és $dv = dt$, ahonnan $du = \dfrac{dt}{1+t^2}$ és $v = t$. Ebből következik, hogy

$$t\operatorname{arctg} t - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{x} dx.$$

Vezessük be a baloldali integrálban az $1 + t^2 = z$ helyettesítést, amiből $2tdt = dz$, illetve $tdt = \dfrac{dt}{2}$. Ebből

$$t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0,$$

$$t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln|z| = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0,$$

illetve

$$t\operatorname{arctg} t = \ln C|x|\sqrt{1+t^2}, \quad C > 0.$$

Visszatérve az eredeti változókra kapjuk az

$$\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C|x|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad C > 0$$

illetve más alakban az

$$y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x\ln C\sqrt{x^2+y^2}, \quad C > 0$$

alakú általános megoldást. Egy megoldás teljesíti az $y(1) = 0$ feltételt, ha igaz, hogy

$$0 \cdot \operatorname{arctg}\frac{0}{1} = 1 \cdot \ln C\sqrt{1^2+0^2},$$

ahonnan $\ln C = 0$ és $C = 1$. A keresett megoldás tehát

$$y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

6.2.3. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

6.9. Definíció. *Az*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

alakú differenciálegyenletet, ahol p és q az x független változótól függő adott folytonos függvények, elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Az egyenlet megoldását $y = uv$ szorzatalakban keressük, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$ ismeretlen függvények. Ekkor az $y' = u'v + uv'$ kifejezést behelyettesítve a lineáris differenciálegyenletbe adódik, hogy

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

illetve

$$u'v + u(p(x)v + v') = q(x). \tag{6.4}$$

Határozzuk meg a v függvényt úgy, hogy igaz legyen a $p(x)v + v' = 0$ egyenlőség, vagyis $\dfrac{dv}{v} = -p(x)dx$. A jobb és bal oldal integrálásával adódik, hogy

$$\ln v = -\int p(x)dx, \quad \text{azaz} \quad v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Ha a v-t visszahelyettesítjük (6.4)-be, akkor az

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

egyenletet kapjuk, amiből integrálás után

$$u = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

adódik, ahol C tetszőleges állandó. Ennek alapján az $y' + p(x)y = q(x)$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

FELADATOK.

1. Mutassuk meg, hogy az $(y\sin x - 1)dx + \cos x dy = 0$ egyenlet lineáris elsőrendű differenciálegyenlet, majd a képlet alapján határozzuk meg azt a partikuláris megoldást, amely kielégíti az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt.

Megoldás. Rendezzük az egyenletet a következő módon:

$$\cos x dy = (1 - y\sin x)dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}y, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$y' + \operatorname{tg} x y = \frac{1}{\cos x}.$$

A fenti alakból már valóban egyértelmű, hogy lineáris elsőrendű differenciálegyenletről van szó, amelyben $p(x) = \operatorname{tg} x$ és $q(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. Ha az általános megoldást

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

képlettel keressük, akkor két integrált kell kiszámítanunk. Ezek közül az egyik:

$$\int p(x)dx = \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t \\ -\sin x dx = dt\end{matrix}\right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|\cos x|.$$

A másik integrált a kapott primitív függvény segítségével számoljuk ki. Eszerint:

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int \frac{1}{\cos x}e^{\ln|\frac{1}{\cos x}|}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C.$$

Az általános megoldás tehát

$$y = e^{\ln|\cos x|}(C + \operatorname{tg} x) = \cos x\,(C + \operatorname{tg} x) = C\cos x + \sin x.$$

Az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt teljesítő megoldásra teljesül, hogy ha $x = 0$ teljesül, akkor $y = 0$-nak is teljesülnie kell, azaz

$$0 = C\cos 0 + \sin 0, \quad \text{ahonnan} \quad C = 0,$$

vagyis a keresett partikuláris megoldás az $y = \sin x$ függvény.

2. Oldjuk meg az $x^2y' + xy + 1 = 0$ lineáris elsőrendű differenciálegyenletet.

Megoldás. Osszuk el az adott egyenletet x^2-tel és rendezzük a következő alakra:

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$, $v = v(x)$ és ahonnan $y' = u'v + uv'$. Ekkor

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Emeljünk ki u-t a bal oldal második és harmadik tagjából, így

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Válasszuk meg a v tényezőt úgy, hogy a bal oldalon a zárójelben levő kifejezés nulla legyen, azaz teljesüljön a

$$v' + \frac{1}{x}v = 0$$

egyenlőség. Innen a változók szétválasztása után

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

adódik, ahonnan a két oldal integrálásával kapjuk, hogy $\ln|v| = -\ln|x|$, illetve $v = \dfrac{1}{x}$. Visszahelyettesítés után az

$$u'v + u \cdot 0 = -\frac{1}{x^2}$$

egyenletet kapjuk, ahonnan

$$u' = -\frac{1}{x}, \quad \text{illetve} \quad du = -\frac{dx}{x}.$$

Mindkét oldal integrálásával az

$$u = -\ln|x| + C$$

megoldás adódik. Az általános megoldás

$$y = uv = \frac{1}{x}\left(C - \ln|x|\right), \quad \text{azaz} \quad y = \frac{C}{x} - \frac{\ln|x|}{x}.$$

3. Határozzuk meg az $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldását.

Megoldás. Elosztva az egyenlet mindkét oldalát x-szel egyértelművé válik, hogy lineáris elsőrendű differenciálegyenletet kell megoldani, amelynek alakja

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad x > 0.$$

Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$, $v = v(x)$ és ahonnan $y' = u'v + uv'$. Ekkor

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Emeljünk ki u-t a bal oldal második és harmadik tagjából, így

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}\right)v = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Válasszuk meg a v tényezőt úgy, hogy a $v' + \frac{1}{x}$ kifejezés nulla legyen. Ha $v' + \frac{1}{x} = 0$, akkor $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$ és $v = \frac{1}{x}$. Az eredeti egyenlet tehát

$$u'\frac{1}{x} = \frac{1 + \ln x}{x}$$

alakú, ahonnan $du = (1 + \ln x)dx$. Mindkét oldal integrálásával kapjuk a

$$\int du = \int (1 + \ln x)dx$$

egyenletet, ahonnan

$$u = x + \int \ln x dx.$$

Mivel $\int \ln x dx$ parciális integrálással oldható meg oly módon, hogy bevezetjük az $U = \ln x$, $dV = dx$ helyettesítést, ahonnan $dU = \frac{1}{x}dx$ és $V = x$, és ebből

$$u = x + \left(x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx\right),$$

$$u = x + x \ln x - x + C, \quad \text{azaz} \quad u = x \ln x + C.$$

Így az általános megoldás

$$y = uv = \frac{1}{x}\left(x \ln x + C\right), \quad \text{azaz} \quad y = \frac{C}{x} + \ln x.$$

A keresett partikuláris megoldáshoz tartozó C állandó pedig az $y(1) = 0$ kezdeti feltétel segítségével a

$$0 = \frac{C}{1} + \ln 1$$

egyenletből határozható meg. Innen $C = 0$, vagyis a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y = \ln x.$$

4. Határozzuk meg az $y' + y\operatorname{ctg} x = 5e^{\cos x}$ differenciálegyenlet $\left(\frac{\pi}{2}, -4\right)$ ponton áthaladó partikuláris megoldását, ha $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Megoldás. Először az általános megoldást kell meghatározni. Mivel az adott egyenlet elsőrendű lineáris differenciálegyenlet, ezért keressük a megoldást $y = uv$ szorzat

alakban, ahol $u = u(x)$, $v = v(x)$ és ahonnan $y' = u'v + uv'$, rendezés után az egyenlet alakja

$$u'v + u(v' + v\operatorname{ctg} x) = 5e^{\cos x}.$$

Egyenlítsük ki a zárójelben levő kifejezést nullával. Ekkor

$$v' + v\operatorname{ctg} x = 0 \quad \text{és} \quad u'v = 5e^{\cos x}.$$

Az első egyenletből meghatározzuk v-t, majd felhasználásával a második egyenletből határozzuk meg az u függvényt, s ezzel az y függvény is adott lesz. Az első egyenlet egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amely rendezés után

$$\frac{dv}{v} = -\operatorname{ctg} x dx$$

alakra hozható. Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát. Ekkor

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \operatorname{ctg} x dx$$

innen pedig

$$\ln|v| = -\ln|\sin x| \quad \text{illetve} \quad |v| = |\sin x|^{-1}.$$

Ekkor

$$v = \frac{1}{\sin x}.$$

A második egyenlet most az

$$\frac{u'}{\sin x} = 5e^{\cos x}$$

alakot veszi fel, amely szintén egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Rendezés után kapjuk, hogy

$$du = 5e^{\cos x} \sin x dx,$$

ahonnan mindkét oldal integrálásával adódik, hogy

$$\int du = 5\int e^{\cos x} \sin x dx.$$

A jobboldalon alkalmazzuk a $\cos x = t$ helyettesítést, ahonnan $-\sin x dx = dt$. Ekkor

$$u = -5e^{\cos x} + C.$$

Az általános megoldást az $y = uv$ képletbe való visszahelyettesítés után kapjuk, és eszerint

$$y = \frac{C - 5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

Hogy a megoldás áthaladjon a $\left(\frac{\pi}{2}, -4\right)$ ponton, teljesülnie kell a

$$-4 = \frac{c - 5e^{\cos\frac{\pi}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2}}, \quad \text{illetve} \quad -4 = \frac{C - 5 \cdot e^0}{1}$$

egyenlőségnek, ahonnan $C = 1$, a keresett partikuláris megoldás pedig

$$y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

5. Határozzuk meg az $(1-x^2)y' + xy - 1 = 0$ differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldását, amely áthalad a $(0,1)$ ponton.

Megoldás. Ha $x \neq 1$ és $x \neq -1$ akkor osszuk az adott egyenletet $(1-x^2)$-tel. Ekkor az

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$$

lineáris elsőfokú differenciálegyenletet kapjuk. Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$, $v = v(x)$ és ahonnan $y' = u'v + uv'$. Ekkor

$$u'v + uv' + \frac{x}{1-x^2}uv = \frac{1}{1-x^2}.$$

Emeljünk ki u-t a bal oldal második és harmadik tagjából, így

$$u'v + u\left(v' + \frac{x}{1-x^2}v\right) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Válasszuk meg a v tényezőt úgy, hogy a $v' + \frac{x}{1-x^2}v$ kifejezés nulla legyen. Ha $v' + \frac{x}{1-x^2}v = 0$, akkor a változók szétválasztása után

$$\frac{dv}{v} = -\frac{xdx}{1-x^2}.$$

Integrájuk a fenti egyenlet mindkét oldalát. Ekkor

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{xdx}{1-x^2}.$$

A jobb oldalon alkalmazzuk az $1-x^2 = t$ helyettesítést, ahonnan $-2xdx = dt$ és $-xdx = \frac{dt}{2}$. Ekkor

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t},$$

amiből

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|t|, \quad \text{azaz} \quad v = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Ha visszahelyettesítünk a megfelelő egyenletbe, akkor az

$$u'\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

egyenletet kapunk, amelyből

$$\int du = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

A jobb oldalon egy irracionális függvény integrálját kell meghatározni, melyet az $x = \sin t$, $dx = \cos x dx$ helyettesítéssel tudunk megoldani. Ekkor

$$u = \int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t \cdot \cos t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C.$$

Mivel $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$ az x változóra való visszatéréssel adódik, hogy

$$u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Az adott differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = uv = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C\right)\sqrt{1-x^2},$$

illetve

$$y = x + C\sqrt{1-x^2}.$$

A keresett partikuláris megoldásra teljesül, hogy $x = 0$ esetés $y = 1$, vagyis

$$1 = 0 + C\sqrt{1-0^2},$$

ahonnan $C = 1$. A keresett partikuláris megoldás tehát az

$$y = x + \sqrt{1-x^2}$$

függvény.

6.2.4. Bernoulli-féle differenciálegyenlet

6.10. Definíció. *Legyen k olyan valós szám, hogy $k \neq 0$ és $k \neq 1$. Az*

$$y' + p(x)y = q(x)y^k$$

alakú differenciálegyenletet, ahol p és q az x független változótól függő adott folytonos függvények, Bernoulli-féle vagy Bernoulli-típusú differenciálegyenletnek nevezzük.

A Bernoulli-féle differenciálegyenletet lineáris differenciálegyenletre való visszavezetéssel szokás megoldani. Szorozzuk be e célból a Bernoulli-típusú differenciálegyenlet mindkét oldalát y^{-k}-val. Beszorzás után az

$$y^{-k}y' + p(x)y^{1-k} = q(x)$$

alakú differenciálegyenletet kapjuk. Vezessük be a $z = z(x) = y^{1-k}(x)$ helyettesítést, ahonnan $z' = (1-k)y^{-k}y'$. Szorozzuk be a fenti egyenlet mindkét oldalát $(1-k)$-val. A behelyettesítés után a Bernoulli-típusú differenciálegyenlet átalkul

$$z' + (1-k)p(x)z = (1-k)q(x),$$

illetve $P(x) = (1-k)p(x)$ és $Q(x) = (1-k)q(x)$ jelöléssel

$$z' + P(x)z = Q(x)$$

alakú lineáris differenciálegyenletté, ahol $z = z(x)$ az új ismeretlen függvény.
A lineáris differenciálegyenletekhez hasonlóan a Bernoulli-típusú differenciálegyenlet megoldását is kereshetjük $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$.

FELADATOK.

1. Határozzuk meg az $y' - y = xy^5$ differenciálegyenlet általános megoldását.

I.Megoldás. Az egyenlet egy Bernoulli-típusú differenciálegyenlet, amelyet egy elsőrendű lineáris differenciálegyenletre szeretnénk visszavezetni, ezért mindkét oldalát megszorozzuk y^{-5}-nel. Ekkor az

$$y'y^{-5} - y^{1-5} = xy^{5-5}, \quad \text{illetve} \quad y'y^{-5} - y \cdot y^{-4} = x$$

egyenletet kapjuk. Bevezetve a $z = y^{-4}$ helyettesítést, ahonnan $z' = -4y'y^{-5}$, és beszorozva az egyenlet mindkét oldalát -4-gyel a

$$z' + 4z = -4x$$

lineáris differenciálegyenletet kapjuk, ahol $z = z(x)$ az új ismeretlen függvény. Most a megoldást $z = uv$ szorzat alakban keresve, ahonnan $z' = u'v + uv'$, a fenti egyenlet átalakul és a továbbiakban az

$$u'v + uv' + 4uv = -4x,$$

illetve

$$u'v + u(v' + 4v) = -4x$$

differenciálegyenletet tekintjük. A v függvényt a

$$v' + 4v = 0$$

egyenletből, az u függvényt pedig az

$$u'v = -4x$$

egyenletből határozzuk meg.

Mindkét differenciálegyenlet szétválasztható változójú és a szokásos módon oldjuk meg őket. A változók szétválasztása után az első egyenletből

$$\frac{dv}{v} = -4dx$$

adódik, amely a két oldal integrálása után az

$$\int \frac{dv}{v} = -4 \int dx,$$

illetve

$$\ln|v| = -4x, \quad \text{azaz} \quad v = e^{-4x}$$

megoldáshoz vezet. Az $u'v = -4x$ egyenlet a v behelyettesítése után az

$$u'e^{-4x} = -4x$$

differenciálegyenlethez vezet. A változók szétválasztása után

$$du = -4xe^{4x}dx,$$

a jobboldalt parciálisan integrálva az

$$u = C - xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x}dx$$

megoldást adja. A lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$z = Ce^{-4x} - x + \frac{1}{4},$$

a Bernoulli-egyenlet általános megoldása pedig a visszahelyettesítés után

$$y^{-4} = Ce^{-4x} - x + \frac{1}{4},$$

azaz

$$y = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{4Ce^{-4x} - 4x + 1}}.$$

II.Megoldás. Keressük most az ismeretlen függvényt $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$. Ekkor $y = u'v + uv'$ és a differenciálegyenletbe való helyettesítés után az

$$u'v + uv' - uv = xu^5v^5, \quad \text{illetve} \quad u'v + u(v' - v) = xu^5v^5$$

egyenlet adódik. Határozzuk meg a v függvényt a

$$v' - v = 0$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldásával. Ekkor

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx, \quad \text{ahonnan} \quad \ln|v| = x, \quad \text{azaz} \quad v = e^x.$$

Ekkor

$$u' \cdot e^x = x \cdot e^{5x} \cdot u^5,$$

szintén szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amely a változók szétválasztása után

$$\frac{du}{u^5} = xe^{4x}dx$$

alakú, mindkét integrálása után pedig

$$\int u^{-5}du = \int xe^{4x}dx,$$

ahonnan a jobboldali integrált parciálisan megoldva az

$$\frac{u^{-4}}{-4} = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{C}{4},$$

illetve rendezés után az

$$\frac{1}{u^4} = -xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C$$

megoldásfüggvény adódik. Explicit alakban kifejezve

$$u = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{e^{4x}\,(1-4x+4Ce^{-4x})}}.$$

Így $y = uv$ miatt

$$y = \pm e^x \cdot \frac{1}{e^x} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{1-4x+4Ce^{-4x}}}, \quad \text{azaz} \quad y = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{1-4x+4Ce^{-4x}}}.$$

2. Határozzuk meg az $2xyy' = y^2 - 2x^3$ differenciálegyenlet $y(1) = 2$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását.

Megoldás. Mutassuk meg, hogy az egyenlet Bernoulli-típusú. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $2xy$-nal ($xy \neq 0$). Ekkor

$$y' = \frac{1}{2x}y - \frac{x^2}{y},$$

rendezés után pedig

$$y' - \frac{1}{2x}y = -x^2y^{-1},$$

tehát a differenciálegyenlet $k = -1$ értékkel Bernoulli-féle. Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát y-nal. Most

$$yy' - \frac{1}{2x}y^2 = -x^2.$$

Vezessük be az $y^2 = z$, $2yy' = z'$ helyettesítést. Az egyenlet mindkét oldalának 2-vel való beszorzása és a behelyettesítés után a

$$2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -2x^2,$$

illetve

$$z' - \frac{1}{x}z = -2x^2$$

lineáris differenciálegyenletet kapjuk. A képlet alapján két integrált kell kiszámítanunk. Az első:

$$\int p(x)dx = \int \frac{dx}{x} = -\ln|x|.$$

A másik az előző felhasználásával

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = -2\int x^2e^{-\ln|x|}dx = -2\int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx = -2\int xdx = -x^2 + C.$$

Ekkor a lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$z = x(C - x^2),$$

a Bernoulli-féle differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$y^2 = x(C - x^2), \quad \text{ahonnan} \quad y = \pm\sqrt{x(C - x^2)}.$$

A C állandó értékét a kezdeti feltételből számítjuk ki, ahonnan

$$2 = +\sqrt{1 \cdot (C - 1^2)}, \quad \text{illetve} \quad C = 5.$$

A keresett partikuláris megoldás eszerint

$$y = \sqrt{x(5 - x^2)}.$$

3. Határozzuk meg az $(x^2 - 1)dy - y(2x - 3y)dx = 0$ differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldását, amelyre $y(2) = 1$ teljesül.

Megoldás. Rendezzük a differenciálegyenletet. Ekkor

$$(x^2 - 1)dy = y(2x - 3y)dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - 3y^2}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1,$$

$$y' - \frac{2x}{x^2 - 1}y = -\frac{3y^2}{x^2 - 1}.$$

Innen megállapítható, hogy az egyenlet Bernoulli-típusú. Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$. Ekkor $y = u'v + uv'$ és a differenciálegyenletbe való helyettesítés után az

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2 - 1}uv = -\frac{3u^2v^2}{x^2 - 1},$$

illetve

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2 - 1}v\right) = -\frac{3u^2v^2}{x^2 - 1}.$$

Határozzuk meg a v függvényt a

$$v' - \frac{2x}{x^2 - 1}v = 0$$

egyenletből. A változók szétválasztása és mindkét oldal integrálásával kapjuk, hogy

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2xdx}{x^2 - 1}.$$

A jobb oldali integrálban vezessük be az $x^2 - 1 = t$, $2xdx = dt$ helyettesítést. Ekkor

$$\ln|v| = \int \frac{dt}{t}, \quad \text{azaz} \quad \ln|v| = \ln|t|.$$

Ebből $v = t$, azaz $v = x^2 - 1$. Visszahelyettesítve adódik az

$$u'(x^2 - 1) = -\frac{3u^2(x^2 - 1)^2}{x^2 - 1}, \quad \text{azaz} \quad u' = -3u^2$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amelynek megoldása a változók szétválasztása és integrálás után

$$\int \frac{du}{u^2} = -3\int dx,$$

illetve

$$-\frac{1}{u} = C - 3x, \quad \text{vagyis} \quad u = \frac{1}{3x - C}.$$

A Bernoulli-féle egyenlet általános megoldása $y = uv$ alapján

$$y = \frac{1}{3x - C} \cdot (x^2 - 1) = \frac{x^2 - 1}{3x - C}.$$

A keresett partikuláris megoldásra igaz, hogy $x = 2$ esetén $y = 1$, ezért

$$1 = \frac{4 - 1}{6 - C},$$

vagyis $C = 3$, ezért

$$y = \frac{x^2 - 1}{3x - 3}, \quad \text{ahonnan} \quad y = \frac{x + 1}{3}, \quad x \neq 1.$$

4. Oldjuk meg az $xy' + y = \dfrac{\ln x}{y^3}$ differenciálegyenletet, ha $x > 0$ és $y \neq 0$.

Megoldás. Az egyenlet

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{xy^3}$$

alakra hozható, tehát Bernoulli-típusú. Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$. Ekkor $y = u'v + uv'$ és a differenciálegyenletbe való helyettesítés után az

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = \frac{\ln x}{xu^3v^3},$$

illetve

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = \frac{\ln x}{xu^3v^3}.$$

Határozzuk meg a v függvényt a

$$v' - \frac{1}{x}v = 0$$

egyenletből. A változók szétválasztása és mindkét oldal integrálásával kapjuk, hogy

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \text{ahonnan} \quad v = \frac{1}{x}.$$

Visszahelyettesítés után adódik az

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x \cdot u^3 \cdot \frac{1}{x^3}}, \quad \text{azaz} \quad u' = \frac{x^3 \ln x}{u^3}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet. A változók szétválasztásával és mindkét oldal integrálásával adódik, hogy

$$\int u^3 du = \int x^3 \ln x dx,$$

illetve

$$\frac{u^4}{4} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{C}{4}.$$

A jobboldali integrált a parciális integrálás módszerével oldottuk meg. Rendezés után kapjuk, hogy

$$u^4 = x^4\left(\ln x - \frac{1}{4} + \frac{C}{x^4}\right), \quad \text{azaz} \quad u = \pm x\sqrt[4]{\ln x - \frac{1}{4} + \frac{C}{x^4}}.$$

A Bernoulli-féle egyenlet általános megoldása

$$y = \pm\sqrt[4]{\ln x - \frac{1}{4} + \frac{C}{x^4}}.$$

5. Határozzuk meg az $3y' + y\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1+\mathrm{ctg}\,x}{y^2\cos x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldását, ha $y \neq 0$ és $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Megoldás. Mivel a differenciálegyenlet Bernoulli-típusú, ezért szorozzuk be mindkét oldalát y^2-tel. Ekkor

$$y^2y' + y^3\mathrm{ctg}\,x = \frac{1+\mathrm{ctg}\,x}{\cos x}.$$

Bevezetve a $z = y^3$ helyettesítést, ahonnan $z' = 3y'y^2$, a

$$3y^2y' + y^3\mathrm{ctg}\,x = \frac{1+\mathrm{ctg}\,x}{\cos x},$$

illetve

$$z' + z\mathrm{ctg}\,x = \frac{1+\mathrm{ctg}\,x}{\cos x}$$

lineáris differenciálegyenletet kapjuk, ahol $z = z(x)$ az új ismeretlen függvény. Most a megoldást $z = uv$ szorzat alakban keresve, ahonnan $z' = u'v + uv'$, a fenti egyenlet átalakul, és a továbbiakban az

$$u'v + uv' + uv\mathrm{ctg}\,x = \frac{1+\mathrm{ctg}\,x}{\cos x},$$

illetve

$$u'v + u\left(v' + v\mathrm{ctg}\,x\right) = \frac{1+\mathrm{ctg}\,x}{\cos x}$$

egyenlettel foglalkozunk. Határozzuk meg a v függvényt a

$$v' + v\mathrm{ctg}\,x = 0$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldásával. Ekkor

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{\cos x}{\sin x}dx, \quad \text{ahonnan} \quad \ln|v| = -\ln|\sin x|, \quad \text{azaz} \quad v = \frac{1}{\sin x}.$$

Ekkor

$$u'\cdot\frac{1}{\sin x} = \frac{1+\mathrm{ctg}\,x}{\cos x}$$

szintén szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amely a változók szétválasztása után

$$du = (1 + \operatorname{tg} x)dx$$

alakú, mindkét oldal integrálásával pedig megkapjuk az

$$u = x - \ln|\cos x| + C$$

megoldást. $z = uv$ alapján

$$z = \frac{1}{\sin x}\left(x - \ln|\cos x| + C\right).$$

Visszahelyettesítve, az eredeti ismeretlen függvény

$$y = \sqrt[3]{z}, \quad \text{vagyis} \quad y = \sqrt[3]{\frac{x - \ln|\cos x| + C}{\sin x}}.$$

6.3. Másodrendű differenciálegyenlet

6.3.1. Másodrendű lineáris differenciálegyenlet

6.11. Definíció. *Legyenek P, Q és f az x változótól függő folytonos függvények az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor az*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

alakú differenciálegyenletet másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Speciálisan, ha a fenti egyenletben $f(x) \equiv 0$, az így kapott

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

egyenletet homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.
A homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásának meghatározásában fontos szerepet játszik a függvények lineáris függetlenségének fogalma.

6.12. Definíció. *Az f_1, f_2, ..., f_n x változójú valós függvények, amelyek a valós számok halmazának egy $[a, b]$ intervallumán értelmezettek, lineárisan függetlenek a valós számok halmaza felett, ha az*

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_n f_n(x) = 0, \quad x \in [a, b] \ ,$$

egyenletnek ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$) $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ az egyetlen megoldása. Azokat a függvényeket, amelyek nem lineárisan függetlenek, lineárisan összefüggőeknek nevezzük.

Két lineárisan összefüggő f_1 és f_2 függvény esetén

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$$

úgy, hogy $\alpha_1 \neq 0$ vagy $\alpha_2 \neq 0$. Ekkor felírható, hogy

$$f_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2(x) \quad \text{vagy} \quad f_2(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} f_1(x),$$

ami azt jelenti, hogy két függvény akkor és csakis akkor lineárisan összefüggő, ha az egyik felírható a másik függvény konstansszorosaként.

A homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlethez tartozó $y_1(x)$ és $y_2(x)$ megoldásfüggvények lineáris függetlenségének meghatározásához a Wronski-féle determinánst használjuk:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Érvényesek a következő állítások.

6.1. Tétel. *Legyen $[a,b]$ a valós számok halmazának egy intervalluma. A következő állítások egymással ekvivalensek:*

a) *Minden $x \in [a,b]$ esetén érvényes, hogy $W(x) \neq 0$;*

b) *Az $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ egyenlet $y_1(x)$, $y_2(x)$, $x \in [a,b]$ megoldásai lineárisan függetlenek.*

6.2. Tétel. *Legyenek y_1 és y_2 az $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ egyenlet lineárisan független megoldásai az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor az egyenlet általános megoldása az adott intervallumon*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandók.

6.3.2. Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet

6.13. Definíció. *Az*

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbf{R}$$

alakú differenciálegyenletet állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Az állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldását most $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keressük, ahol k állandó. Mivel $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, a differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Ebből az egyenletből kapjuk a

$$k^2 + pk + q = 0$$

egyenletet, melyet az $y'' + py' + qy = 0$ állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezünk, és megoldásainak természetéből adódóan három esetet különböztetünk meg.

a) Legyen $p^2 - 4q > 0$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet k_1 és k_2 megoldásai valósak és különbözőek, tehát az $y_1 = e^{k_1 x}$ és $y_2 = e^{k_2 x}$ függvények az $y'' + py' + qy = 0$ differenciálegyenlet megoldásai. Mivel a Wronski-féle determináns

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0\ ,$$

a kapott megoldások lineárisan függetlenek, így az $y'' + py' + qy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

alakú, ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandók.

b) Legyen $p^2 - 4q = 0$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet k_1 és k_2 megoldásai valósak és egyenlőek. $y_1 = e^{k_1 x}$ az egyik megoldás és közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy $y_2 = xe^{k_1 x}$ is megoldása az $y'' + py' + qy = 0$ differenciálegyenletnek. Ekkor az y_1 és y_2 lineárisan független partikuláris megoldások, az általános megoldás pedig

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}, \quad \text{illetve} \quad y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x},$$

ahol C_1 i C_2 tetszőleges állandók.

c) Legyen $p^2 - 4q < 0$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet k_1 és k_2 megoldásai konjugált komplex számok, tehát felírhatók $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ alakban, ahol $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Az Euler-formula alapján

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x,$$

ami azt sugallja, hogy $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ és $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ az $y'' + py' + qy = 0$ differenciálegyenlet megoldásai. Könnyen belátható, hogy ez valóban így van, mint ahogy az is, hogy ezek a megoldások lineárisan függetlenek. Az általános megoldás

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$

ahol C_1 i C_2 tetszőleges állandók.

FELADATOK.

1. Határozzuk meg az $y'' - 5y' + 6y = 0$ másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol k állandó. Mivel $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2 e^{kx}$, a differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy

$$k^2 e^{kx} - 5ke^{kx} + 6e^{kx} = 0, \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(k^2 - 5k + 6) = 0.$$

Mivel $e^{kx} \neq 0$, ezért a fenti szorzat másik tényezője kell nulla legyen, így kapjuk a

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek megoldásai $k_1 = 2$ és $k_2 = 3$. Ezért $y_1 = e^{2x}$ és $y_2 = e^{3x}$ az $y'' - 5y' + 6y = 0$ egyenlet lineárisan független partikuláris megoldásai. A 6.2. Tétel alapján a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x},$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandók.

2. Határozzuk meg az $y'' - 6y' + 9y = 0$ differenciálegyenlet olyan megoldását, amely kielégíti az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltételeket.

Megoldás. Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol k állandó. Ekkor $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2 e^{kx}$. A differenciálegyenletbe való behelyettesítás után

$$k^2 e^{kx} - 6ke^{kx} + 9e^{kx} = 0, \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(k^2 - 6k + 9) = 0$$

adódik, s mivel $e^{kx} \neq 0$, ezért a fenti szorzat másik tényezője kell nulla legyen, így kapjuk a

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek megoldásai $k_1 = k_2 = 3$. A keresett lineárisan független partikuláris megoldások most $y_1 = e^{3x}$ és $y_2 = xe^{3x}$, az általános megoldás pedig

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}, \quad \text{azaz} \quad y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x},$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandók.
A keresett partikuláris megoldás ki kell elégítse az $y(0) = 1$ és $y'(0) = 2$ feltételeket. Mivel

$$y' = (C_2 + 3C_1 + 3C_2 x)\, e^{3x},$$

C_1 és C_2 meghatározásához a

$$C_1 e^{3\cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0} = 1, \quad (C_2 + 3C_1 + 3C_2 \cdot 0)\, e^{3\cdot 0} = 2$$

két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ebből

$$C_1 = 1 \quad \text{és} \quad C_2 + 3C_1 = 2,$$

vagyis a megoldás $C_1 = 1$ és $C_2 = -1$, a keresett partikuláris megoldás pedig

$$y = (1 - x)e^{3x}.$$

3. Határozzuk meg az $y'' - 4y' + 13y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely áthalad az origón és amelynek iránytényezője az origóban 1.

Megoldás. Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol k állandó. Ekkor $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2 e^{kx}$. A behelyettesítés után

$$k^2 e^{kx} - 4ke^{kx} + 13e^{kx} = 0, , \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(k^2 - 4k + 13) = 0$$

adódik, s mivel $e^{kx} \neq 0$, így kapjuk a

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek megoldásai $k_1 = 2 + 3i$ és $k_2 = 2 - 3i$. A keresett lineárisan független partikuláris megoldások most az $y_1 = e^{2x} \cos 3x$ és az $y_2 = e^{2x} \sin 3x$ függvények, az általános megoldás pedig

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x, \quad \text{azaz} \quad y = e^{2x} \left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right),$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandók.
A keresett partikuláris megoldás ki kell elégítse az $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeket. Mivel

$$y' = e^{2x} \left(2C_1 \cos 3x + 2C_2 \sin 3x - 3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x\right),$$

C_1 és C_2 meghatározásához a

$$e^0 \left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) = 0,$$

$$e^0\left(2C_1\cos 0 + 2C_2\sin 0 - 3C_1\sin 0 + 3C_2\cos 0\right) = 1$$

két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ebből

$$C_1 = 0 \quad \text{és} \quad 3C_2 = 1,$$

vagyis a megoldás $C_1 = 0$ és $C_2 = \dfrac{1}{3}$, a keresett partikuláris megoldás pedig

$$y = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x.$$

4. Határozzuk meg az $y'' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldását.

Megoldás. Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol k állandó. Ekkor $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2e^{kx}$. A differenciálegyenletbe való behelyettesítás után

$$k^2e^{kx} - 2e^{kx} = 0, \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(k^2 - 2) = 0$$

adódik. Mivel $e^{kx} \neq 0$, ezért

$$k^2 - 2 = 0$$

a karakterisztikus egyenlet, amelynek megoldásai $k_1 = -\sqrt{2}$ és $k_2 = \sqrt{2}$. A keresett lineárisan független partikuláris megoldások most $y_1 = e^{-\sqrt{2}x}$ és $y_2 = e^{\sqrt{2}x}$, az általános megoldás pedig

$$y = C_1e^{-\sqrt{2}x} + C_2e^{\sqrt{2}x},$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandók.
A keresett partikuláris megoldás ki kell elégítse az $y(0) = 2$ és $y'(0) = 0$ kezdeti feltételeket. Mivel

$$y' = -C_1\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x} + C_2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x},$$

C_1 és C_2 meghatározásához a

$$C_1e^0 + C_2e^0 = 2, \quad -C_1\sqrt{2}e^0 + C_2\sqrt{2}e^0 = 0$$

két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ebből

$$C_1 + C_2 = 2 \quad \text{és} \quad -C_1 + C_2 = 0,$$

vagyis a megoldás $C_1 = 1$ és $C_2 = 1$, a keresett kezdetérték-probléma megoldása pedig

$$y = e^{-\sqrt{2}x} + e^{\sqrt{2}x}.$$

5. Oldjuk meg az $2y'' - 2y' + 3y = 0$ differenciálegyenletet.

Megoldás. Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol k állandó. Ekkor $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2e^{kx}$. A behelyettesítés után

$$2k^2e^{kx} - 2ke^{kx} + 3e^{kx} = 0,, \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(2k^2 - 2k + 3) = 0$$

adódik, s mivel $e^{kx} \neq 0$, így kapjuk a

$$2k^2 - 2k + 3 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek konjugált komplex megoldásai $k_1 = \frac{1-i\sqrt{5}}{2}$ és $k_2 = \frac{1+i\sqrt{5}}{2}$. Mivel a konjugált komplex megoldások valós része $\alpha = \frac{1}{2}$, képzetes része pedig $\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, a keresett lineárisan független partikuláris megoldások most $y_1 = e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x$ és $y_2 = e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x$, az általános megoldás pedig

$$y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{5}x}{2} + C_2\sin\frac{\sqrt{5}x}{2}\right),$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandók.

6.3.3. Állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet

6.14. Definíció. *Az*

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbf{R},$$

alakú differenciálegyenletet, ahol f folytonos, nem identikusan nulla valós függvény, állandó együtthatós inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Az inhomogén differenciálegyenlet megoldásában fontos szerepet játszik a következő tétel.

6.3. Tétel. *Legyen $y = y_h(x)$, $x \in [a,b]$ az $y''+py'+qy = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldása és $y = y_p(x)$, $x \in [a,b]$ az $y''+py'+qy = f(x)$ inhomogén differenciálegyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldása. Ekkor az $y''+py'+qy = f(x)$ inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása $y = y_h(x) + y_p(x)$, $x \in [a,b]$.*

Az $y''+py'+qy = f(x)$ inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását a következő speciális esetekben tudjuk meghatározni.

a) $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$.

Ha $f(x)$ n-edrendű polinom, a partikuláris megoldást

$$y_p(x) = x^s(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n)$$

alakban keressük, ahol s a 0 számnak mint a $k^2+pk+q = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásának multiplicitása, azaz $s = 0$ ha a 0 szám nem gyöke az egyenletnek, $s = 1$ ha a 0 egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, illetve $s = 2$ ha a 0 kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

b) $f(x) = ae^{\alpha x}$, $a, \alpha \in \mathbf{R}$.

A partikuláris megoldást

$$y_p(x) = \lambda e^{\alpha x}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

alakban keressük. Ekkor $y_p'(x) = \lambda\alpha e^{\alpha x}$, $y_p''(x) = \lambda\alpha^2 e^{\alpha x}$, és az egyenletbe való behelyettesítés után adódik, hogy

$$\lambda\alpha^2 e^{\alpha x} + \lambda p\alpha e^{\alpha x} + \lambda q e^{\alpha x} = ae^{\alpha x},$$

ahonnan $\lambda(\alpha^2 + p\alpha + q) = a$ következik. Ha α nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor, $\lambda = \dfrac{a}{\alpha^2 + p\alpha + q}$.

Ha α a karakterisztikus egyenlet gyöke, akkor a partikuláris megoldást

$$y_p(x) = \lambda x^s e^{\alpha x}$$

alakban keressük, ahol s az α gyök multiplicitása.

c) $f(x) = (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n)e^{\alpha x}$, $\alpha, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$.

A partikuláris megoldást

$$y_p(x) = x^s(b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n)e^{\alpha x}$$

alakban keressük, ahol s a $k^2 + pk + q = 0$ karakterisztikus egyenlet α gyökének multiplicitása, azaz $s = 0$ ha α nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, $s = 1$, ha α a karakterisztikus egyenlet egyszeres gyöke, illetve $s = 2$, ha α a karakterisztikus egyenlet kétszeres gyöke.

d) $f(x) = e^{\alpha x}(a \sin \beta x + b \cos \beta x)$, $a, b, \beta \in \mathbf{R}$.

A partikuláris megoldást

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x), \quad A, B \in \mathbf{R}$$

alakban keressük, ahol s a karakterisztikus egyenlet $\alpha + i\beta$ gyökének multiplicitása. Tehát, ha $\alpha + i\beta$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $s = 1$, ha $\alpha + i\beta$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $s = 0$.

Ha az inhomogén differenciálegyenletben az f függvény

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_k(x)$$

alakú, ahol az f_i, $i = 1, 2, ..., k$, függvények a fentiekben felsorolt függvények valamelyikével egyeznek meg, akkor a következő módon járunk el. Meghatározzuk az

$$y'' + py' + qy = f_i(x), \quad i = 1, 2, ..., k$$

differenciálegyenletek megfelelő y_{p_i} partikuláris megoldásait. Ekkor az inhomogén differenciálegyenlet y_p partikuláris megoldása

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + ... + y_{p_k}$$

alakban írható fel.

FELADATOK.

1. Oldjuk meg az $y'' + y' - 6y = x$ differenciálegyenletet.

Megoldás. Először meghatározzuk az

$$y'' + y' - 6y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet y_h általános megoldását, amelyet $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keresünk. Az egyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy

$$k^2 e^{kx} + k e^{kx} - 6e^{kx} = 0,$$

ami ekvivalens az

$$e^{kx}(k^2 + k - 6) = 0$$

egyenlettel. Mivel az exponenciális kifejezés nem lehet nulla, ezért a k ismeretlenű másodfokú polinom kell nulla legyen. A kapott egyenlet,

$$k^2 + k - 6 = 0,$$

az eredeti homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete. A $k_1 = -3$ és $k_2 = 2$ gyökök valósak és egyenlőek, tehát a megfelelő homogén differenciálegyenlet megoldása

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Mivel a lineáris inhomohén differenciálegyenlet x változójú függvénye egy lineáris polinom, az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p = x^s(Ax + B)$$

alakban keressük, ahol s a karakterisztikus egyenlet $k = 0$ megoldásának multiplicitása. Mivel ebben az esetben $s = 0$, ezért

$$y_p = Ax + B, \quad y_p' = A, \quad y_p'' = 0.$$

Minden partikuláris megoldás kielégíti az egyenletet, ezért behelyettesítve az inhomogén egyenletbe adódik, hogy

$$0 + A - 6(Ax + B) = x,$$

ahonnan kapjuk a

$$-6A = 0, \quad A - 6B = 0$$

két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert, amelynek megoldása

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{36}.$$

A megfelelő partikuláris megoldás tehát

$$y_p = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{36},$$

az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$y = y_h + y_p,$$

vagyis

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{2x} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

2. Határozzuk meg az $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték-probléma megoldását.

Megoldás. Határozzuk meg először az

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet y_h általános megoldását, amelyet $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keresünk. Az egyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy

$$k^2e^{kx} - 8ke^{kx} + 16e^{kx} = 0,$$

ami ekvivalens az

$$e^{kx}(k^2 - 8k + 16) = 0$$

egyenlettel. A homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$k^2 - 8k + 16 = 0,$$

amelynek gyökei $k_1 = k_2 = 4$ valósak és egyenlőek, tehát a megfelelő homogén differenciálegyenlet megoldása

$$y_h = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Az inhomogén egyenletben szereplő x változójú függvény $f(x) = e^{4x}$ exponenciális függvény, ezért az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p = Ax^se^{4x}$$

alakban keressük, ahol s a karakterisztikus egyenlet $k = 4$ megoldásának multiplicitása. Most $s = 2$, mivel a 4 a karakterisztikus egyenlet kettős gyöke, ezért

$$y_p = Ax^2e^{4x}, \quad y_p' = A(2x + 4x^2)e^{4x}, \quad y_p'' = A(2 + 16x + 16x^2)e^{4x}.$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe adódik, hogy

$$A(2 + 16x + 16x^2)e^{4x} - 8A(2x + 4x^2)e^{4x} + 16Ax^2e^{4x} = e^{4x}.$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát e^{4x}-nel ($e^{4x} \neq 0$), ekkor

$$16Ax^2 + 16Ax + 2A - 16Ax - 32Ax^2 + 16Ax^2 = 1,$$

ahonnan $2A = 1$, illetve

$$A = \frac{1}{2}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása tehát

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{4x},$$

az inhomogén egyenlet általános megoldása pedig

$$y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x} + \frac{1}{2}x^2e^{4x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

illetve

$$y = e^{4x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Vegyük figyelembe most a kezdeti feltételeket. Ehhez szükséges a megoldás első deriváltja. Mivel

$$y' = e^{4x}\left(4C_1 + 4C_2 x + 2x^2 + C_2 + x\right),$$

behelyettesítve az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeket az

$$e^0\left(C_1 + C_2 \cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = 0, \quad e^0\left(4C_1 + 4C_2 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + C_2 + 0\right) = 1$$

két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1,$$

ahonnan következik, hogy a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y = e^{4x}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right).$$

3. Határozzuk meg az $y''+4y'+4y = 3-x^2-4e^{2x}$ inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Először meghatározzuk az

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet y_h általános megoldását, amelyet $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keresünk. Az egyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy

$$k^2e^{kx} + 4ke^{kx} + 4e^{kx} = 0,$$

ami ekvivalens az

$$e^{kx}(k^2 + 4k + 4) = 0$$

egyenlettel.

Mivel az exponenciális kifejezés nem lehet nulla, ezért a k ismeretlenű másodfokú polinom kell nulla legyen. A kapott egyenlet,

$$k^2 + 4k + 4 = 0,$$

az eredeti homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete. A $k_1 = -2$ és $k_2 = -2$ gyökök valósak és egyenlőek, tehát a megfelelő homogén differenciálegyenlet megoldása

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}.$$

Mivel a lineáris inhomohén differenciálegyenlet x változójú függvénye egy polinom és egy exponenciális függvény összege, két partikuláris megoldást keresünk. Ezek

$$y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C \quad \text{és} \quad y_{p_2} = De^{2x}.$$

y_{p_1} és deriváltjainak az $y'' + 4y' + 4y = 3 - x^2$ egyenletbe való behelyettesítése után adódik, hogy

$$2A + 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 3 - x^2.$$

Az egyenletet kielégítik az $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ és $C = \frac{3}{8}$ paraméterértékek, ezért az egyik partikuláris megoldás

$$y_{p_1} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}.$$

y_{p_2} és deriváltjainak $y'' + 4y' + 4y = -4e^{2x}$ egyenletbe való behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$4De^{2x} + 4 \cdot 2De^{2x} + 4De^{2x} = -4e^{2x}.$$

Az egyenletet kielégíti a $D = -\frac{1}{4}$ paraméterérték, tehát a másik partikuláris megoldás

$$y_{p_2} = -\frac{1}{4}e^{2x}.$$

Az adott inhomohén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2},$$

azaz

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}e^{2x}.$$

4. Határozzuk meg az $y'' - y' + y = (x+1)e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. A

$$y'' - y' + y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet megoldását $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keressük. Az

$$k^2e^{kx} - ke^{kx} + e^{kx} = 0$$

egyenletbe való behelyettesítés után adódik, hogy

$$e^{kx}(k^2 - k + 1) = 0.$$

Mivel az exponenciális kifejezés nem lehet nulla, ezért a k ismeretlenű másodfokú polinom kell nulla legyen. A karakterisztikus egyenlet most

$$k^2 - k + 1 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai konjugált komplex számok:

$$k_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{és} \quad k_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

így a homogén differenciálegyenlet megoldása

$$y_h = C_1e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Mivel az $(x+1)e^{2x}$ függvény szerepel a jobb oldalon, ezért az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását lineáris polinom és exponenciális függvény szorzataként keressük:

$$y_p = (Ax+B)e^{2x}.$$

y_p és deriváltjainak az adott egyenletbe való behelyettesítése után adódik, hogy

$$4Ae^{2x} + 4(Ax+B)e^{2x} - (Ae^{2x} + 2(Ax+B)e^{2x}) + (Ax+B)e^{2x} = (x+1)e^{2x}.$$

Az egyenletet kielégítik az $A = \dfrac{1}{3}$ és $B = 0$ paraméterértékek, tehát a partikuláris megoldás

$$y_p = \frac{1}{3}xe^{2x}.$$

Az adott lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = y_h + y_p,$$

azaz

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}xe^{2x}.$$

5. Oldjuk meg az $y'' - y' - 6y = 3e^{-2x} + \cos 3x$ differenciálegyenletet.

Megoldás. Először az

$$y'' - y' - 6y = 0$$

homogén differenciálegyenlet általános megoldását keressük $y = e^{kx}$ exponenciális alakban. Az egyenletbe való visszahelyettesítés után adódik, hogy

$$k^2e^{kx} - ke^{kx} - 6e^{kx} = 0,$$

ami ekvivalens az

$$e^{kx}(k^2 - k - 6) = 0$$

egyenlettel. Mivel az exponenciális kifejezés nem lehet nulla, ezért az r ismeretlenű másodfokú polinom kell nulla legyen. A karakterisztikus egyenlet most

$$k^2 - k - 6 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai, $k_1 = -2$ és $k_2 = 3$, különböző valós számok, ezért a homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}.$$

Két partikuláris megoldást keresünk, az egyiket exponenciális, a másikat pedig trigonometrikus alakban.

Mivel a -2 a karakterisztikus egyenlet egyszeres gyöke, ezért az exponenciális függvénynek megfelelő partikuláris megoldást

$$y_{p_1} = Axe^{-2x}$$

alakban keressük. y_{p_1} és deriváltjainak $y'' - y' - 6y = 3e^{-2x}$ egyenletbe való behelyettesítése után adódik, hogy

$$-4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} - (Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}) - 6 \cdot Axe^{-2x} = 3e^{-2x}.$$

Az egyenletet kielégíti az $A = -\frac{3}{5}$ paraméterérték, ezért az első partikuláris megoldás

$$y_{p_1} = -\frac{3}{5}xe^{-2x}.$$

A trigonometrikus függvénynek megfelelő partikuláris megoldást

$$y_{p_2} = B\cos 3x + C\sin 3x$$

alakban keressük. y_{p_2} és deriváltjainak az $y'' - y' - 6y = \cos 3x$ egyenletbe való behelyettesítése után adódik, hogy

$$-9B\cos 3x - 9C\sin 3x - (-3B\sin 3x + 3C\cos 3x) - 6(B\cos 3x + C\sin 3x) = \cos 3x,$$

illetve

$$(3B - 15C)\sin 3x - (15B + 3C + 1)\cos 3x = 0.$$

Az egyenlőség $3B - 15C = 0$ és $15B + 3C + 1 = 0$ esetén igaz, tehát $B = -\frac{5}{78}$ és $C = -\frac{1}{78}$. A keresett partikuláris megoldás most

$$y_{p_2} = -\frac{5}{78}\cos 3x - \frac{1}{78}\sin 3x.$$

Az adott lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2},$$

illetve

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{3x} - \frac{3}{5}xe^{-2x} - \frac{5}{78}\cos 3x - \frac{1}{78}\sin 3x.$$

Irodalom

[1] *Kleine Enzyklopädie - Mathematik*, VEB Velag Enzyklopädie, Leipzig, 1967.

[2] *Matematikai kislexikon*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.

[3] *Természettudományi kislexikon*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.

[4] Bajcsai P., Fazekas F., *Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[5] Bárczi B., *Integrálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[6] Bertolino M., *Diferencijalne jednačine*, Naučna Knjiga, Beograd, 1980.

[7] Boros I., *Diszkrét matematika*, Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka, 2008.

[8] Boros I., Csikós Pajor G., *Diszkrét matematika, Feladatgyűjtemény*, Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka, 2008.

[9] Bronštejn I. N., Semendjajev K. A., Musiol G., Milig H., *Matematički priručnik*, SOHO GRAPH, Beograd, 2004.

[10] Budinčević M., *Zbirka zadataka iz integralnog računa*, UNS PMF, Novi Sad, 1973.

[11] Budinčević M., Marić V., *Obične diferencijalne jednačine - Problemi i zadaci*, Naučna Knjiga, Beograd, 1978.

[12] Csikós Pajor G., *Matematikai analízis*, Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka, 2008.

[13] Dugopolski M., *College Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1995.

[14] Fazekas F., *Határozatlan integrál*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[15] Georgijević D., Obradović M., *Zbirka rešenih zadataka za drugi razred srednjih škola*, Matematiskop, Beograd, 2000.

[16] Gy. Bartha Gy., Elbert Á., Hadnagy A., Loránt L., Riborics Gy., Scharnitzky V., *Matematikai feladatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.

[17] Hajnal I., Nemetz T., Pintér L., Urbán J., *Matematika (fakultatív B változat) IV. osztály*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

[18] Hajnal I., *Matematika a speciális matematika I. osztálya számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[19] Hajnal I., Pintér L., *Matematika (fakultatív B változat) III. osztály*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[20] Hadžić O., Takači Dj., *Matematičke metode za studente prirodnih nauka*, Újvidéki Egyetem, TTK, Újvidék, 2000.

[21] Hatvani L., Pintér L., *Differenciálegyenletes modellek a középiskolában*, POLYGON, Szeged, 1997.

[22] Hatvani L., Krisztin T., Makay G., *Dinamikus modellek a közgazdaságban*, POLYGON, Szeged, 2001.

[23] Kadelburg Z., Mićić V., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 2, udžbenik sa zbirkom zadataka za 3. razred Matematičke gimnazije*, KRUG, Beograd, 2008.

[24] Kadelburg Z., Mićić V., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 3, udžbenik sa zbirkom zadataka za 3. razred Matematičke gimnazije*, KRUG, Beograd, 2003.

[25] Kadelburg Z., Mićić V., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 4, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred Matematičke gimnazije*, KRUG, Beograd, 2003.

[26] Kármán T., Biot M. A., *Matematikai módszerek műszaki feladatok megoldására*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

[27] Kečkić J. D., *Matematika és feladatgyűjtemény - a középiskolák III. osztálya számára*, Zavod za Udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2005.

[28] Kovács J., Takács G., Takács M., *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.

[29] Korn G. A., Korn T. M., *Matematikai kézikönyv műszakiaknak*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

[30] Marić V., Skendžić M., *Obične diferencijalne jednačine*, Naučna Knjiga, Beograd, 1980.

[31] Marić V., Budinčević M., *Diferencijalne i diferencne jednačine*, PMF, Novi Sad, 2005.

[32] Máté L., *Rekurzív sorozatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[33] Miličić P. M., Uščumlić M. P., *Zbirka zadataka iz više matematike I*, Naučna Knjiga, Beograd, 1982.

[34] Miller K. S., *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations*, Henry Holt and Company, New York, 1960.

[35] Monostori I., Szeredai E., *Differenciálegyenletek*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998.

[36] Obádovics J. Gy., *Matematika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[37] Obádovics J. Gy., Szarka Zoltán, *Felsőbb matematika*, Scolar Kiadó, Budapest, 1999.

[38] Obádovics J. Gy., *Felsőbb matematikai feladatgyűjtemény*, Scolar Kiadó, Budapest, 1999.

[39] Obádovics J. Gy., Szarka Z., *Felsőbb matematikai összefoglaló műszakiaknak*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[40] Obradović M., Georgijević D., *Matematika és feladatgyűjtemény - a középiskolák IV. osztálya számára*, Zavod za Udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1998.

[41] Peić H., Szarapka L., *100 rešenih ispitnih zadataka iz matematike*, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski Fakultet, Subotica, 1996.

[42] Peić H., *Matematika I.*, Újvidéki Egyetem, Építőmérnöki Kar, Szabadka, 2005.

[43] Peić H., Rožnjik A., *Magyar-szerb-angol matematikai szótár*, ÚJ KÉP SZÓTÁR, Vajdasági Módszertani Központ, Szabadka, 2007.

[44] Rábai I., *Elemi matematikai példatár III. - sorozatok, sorok, válogatott feladatok*, Gondolat, Budapest, 1976.

[45] Scharnitzky V., *Differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.

[46] Scharnitzky V., *Matematikai feldatok - matematika a műszaki főiskolák számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[47] Szabó T., *Kalkulus II. Példatár*, POLYGON, Szeged, 2002.

[48] Szerényi T., *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[49] Stojanović V., *Zbirka rešenih zadataka za prvi razred srednjih škola*, Matematiskop, Beograd, 2003.

[50] Vukadinović S., Stojanović V., *Zbirka rešenih zadataka za četvrti razred srednjih škola*, Matematiskop, Beograd, 1999.

[51] Zolić A., Kadelburg Z., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 1, udžbenik sa zbirkom zadataka za 3. razred Matematičke gimnazije*, KRUG, Beograd, 2003.

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

51(035.057.874)

CSIKÓS Pajor, Gizella
Analízis [Elektronski izvor] elméleti összefoglaló és
példatár / Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka ; [ábrák
Rožnjik Andrea]. - Zenta : Bolyai Farkas Alapítvány, 2010. -
1 elektronski optički disk (CD-ROM) : tekst, slika ; 12 cm

Dostupno i na: www.bolyai-zenta.edu.rs. - Nasl. s naslovnog
ekrana. - Bibliografija.

ISBN 978-86-87951-01-3
1. Péics Hajnalka
a) Математика - Приручници

COBISS.SR-ID 252784903